

Exercice 5. On appelle *nombre dyadique* tout nombre rationnel de la forme $\frac{m}{2^n}$, avec $m \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans \mathbf{R} .

Exercice 6.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans \mathbf{Z} .
Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire, c'est-à-dire si elle est constante à partir d'un certain rang.
2. Soit $D \subset \mathbf{Z}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que D possède un plus grand élément.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}, N \geq N_0 \implies u_n \geq \frac{\ell}{2}$.

Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle bornée et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant vers une limite $\ell \in \mathbf{R}$.

1. On suppose $\ell = 0$. Montrer que $(u_n v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.
2. Est-ce toujours vrai si $\ell \neq 0$?

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites réelles convergentes. Étudier la convergence de la suite $(\max\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbf{N}}$ de deux manières différentes :

1. en commençant par chercher une expression simple de $\max\{x, y\}$ en fonction de x et y pour tous $x, y \in \mathbf{R}$ (*Indication : on pourra s'intéresser à $\max\{x, y\} + \min\{x, y\}$ et $\max\{x, y\} - \min\{x, y\}$);*)
2. en revenant à la définition de la limite.

Exercice 10. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, dont le terme général est donné par :

- | | | |
|--|---|--|
| a) $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$, | b) $u_n = \left(n + \frac{2}{n^2}\right)^3 - n^3$, | c) $u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right) \left(n - \frac{1}{n}\right) - n^2$, |
| d) $u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$, | e) $u_n = \frac{(-1)^n}{n + 1}$, | f) $u_n = \frac{2n^6 + 5n + 1}{n^6 - 2}$, |
| g) $u_n = (-1)^n n$, | h) $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$, | i) $u_n = \sqrt[n]{n}$, |
| j) $u_n = 2 + \frac{\sin(n) - 4}{n^2}$, | k) $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$, | l) $u_n = \frac{(-5)^n + n}{3^n - 1}$, |
| m) $u_n = \frac{n!}{n^n}$. | | |

Exercice 11. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie pour $n \in \mathbf{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

1. Étudier la convergence des suites $(u_{n^2})_{n \in \mathbf{N}}$ et $(u_{n^2+n})_{n \in \mathbf{N}}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas.

Exercice 13. Irrationalité de e .

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$ et $v_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
2. Posons $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Nous allons démontrer que e est un nombre irrationnel en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe deux entiers naturels $p, q \geq 1$ tels que $e = \frac{p}{q}$.
 - Établir l'encadrement $u_n < e < v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
 - Vérifier que $q!u_q$ et $q!v_q$ sont deux nombres entiers consécutifs.
 - Conclure le raisonnement.

Exercice 14.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite des suites de terme général :

a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

b) $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 15. Somme harmonique

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 16. Lemme de Cesàro.

1. Soit (u_n) une suite réelle. On définit la suite (v_n) dont le terme général est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (u_n) :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ alors (v_n) converge également vers ℓ .

2. Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ .
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite strictement positive telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Démontrer que la suite $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ .

4. Déduire de ce qui précède

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

(Indication : pour la seconde suite, on pourra utiliser l'exercice 14)

Exercice 17. Suites arithmético-géométriques.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a \neq 1$ et soit $u^{(0)} \in \mathbf{R}$. On définit par récurrence $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que : $u_0 = u^{(0)}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha = a\alpha + b$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}} = (u_n - \alpha)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. Étudier la convergence de (u_n) . (*Indication : on distinguera les cas $|a| < 1$, $|a| > 1$ et $a = -1$*).
5. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la somme $\sum_{k=0}^n u_k$.

Exercice 18.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n), & \forall n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

1. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 2x(1 - x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Dresser le tableau des variations de f et dessiner son graphe.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
3. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f . Déterminer les points fixes de f . Que peut-on dire de la suite (u_n) si u_0 est l'un des points fixes de f ?
4. Montrer que les intervalles $] - \infty, 0[$ et $]0, 1/2[$ sont stables par f et que f est croissante sur ces intervalles. *On dit qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.*
5. On suppose que $u_0 \in]0, 1/2[$. Montrer que la suite (u_n) est alors croissante (*On pourra s'aider de la question 3.*) En déduire la nature de la suite (u_n) . Même question si $u_0 \in] - \infty, 0[$.
6. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]1/2, +\infty[$.

Exercice 19.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(u_n^2 - 1), & \forall n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

1. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x(x^2 - 1)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Répéter pour f l'étude des questions 1 à 3 de l'exercice précédent.
2. Montrer que l'intervalle $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ est stable par f et que f est décroissante sur cet intervalle.
3. On suppose que $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et déterminer leur monotonie en fonction du signe de u_0 (*On pourra montrer que pour $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, on a $|f(x)| \leq |x|$*). Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.
4. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.
5. On suppose que $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. En déduire la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$. Quelle est la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}[$?
6. Étudier la nature de la suite (u_n) lorsque $u_0 \in]-\infty, -\sqrt{2}[$ et lorsque $u_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$.

Exercice 20.

En suivant la démarche des exercices 18 et 19, étudier les suites définies par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est donnée par :

- a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^2 + 1$, c) $f(x) = \sqrt{1+x}$,
 d) $f(x) = 1 + \ln(x)$, e) $f(x) = e^x - 1$, f) $f(x) = \frac{1}{2+x}$.

Pour certaines valeurs de u_0 , la suite (u_n) peut ne pas être définie à partir d'un certain rang.

Exercice 21.

- Montrer que : $\forall x \in [3, 5], 3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$.
- On définit $\varphi : [3, 5] \rightarrow [3, 5], x \mapsto 3 + \frac{4}{x}$.
 - Déterminer l'ensemble des points fixes de φ .
 - Montrer que : $\forall x \in [3, 5], |\varphi(x) - 4| \leq \frac{|x-4|}{2}$.
- On considère la suite $(u_n) \in [3, 5]^{\mathbf{N}^*}$ définie par $u_1 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = 3 + \frac{4}{u_n}$.
 - Montrer que (u_n) converge et donner sa limite ℓ .
 - Déterminer un entier $N \in \mathbf{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $n \geq N$, u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

Exercice 22. *Calcul approché de \sqrt{a} .*

Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$.

- Donner l'ensemble de définition et le tableau de variations de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$.
- Étudier la convergence de la suite (u_n) .
- On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$.
Calculer v_{n+1} en fonction de v_n , puis v_n en fonction de v_0 et n .
- Montrer que, si $u_0 > \sqrt{a}$, on a $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0.v_0^{2^n}$.

Ainsi, u_n réalise une approximation de \sqrt{a} à la précision $2u_0.v_0^{2^n}$.

Exercice 23.

Montrer que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}$$

Exercice 24. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \in (\mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note f_n la fonction

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto 1 - \sum_{i=1}^n a_i x^i \end{array} .$$

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbf{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
- Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.
- En déduire qu'elle converge.

Exercice 25.

Soit n un entier naturel et E_n l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in]-\pi/2, \pi/2[$.

1. Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n .
2. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 26.

Soient I un intervalle et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans \mathbf{R} . On suppose que, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

- l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ admet une unique solution x_n ;
- la fonction f_n est strictement croissante sur I ;
- pour tout $x \in I$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

1. Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
2. Démontrer rigoureusement cette conjecture.
3. Application : considérer la suite des fonctions f_n définies sur \mathbf{R}_+^* par $f_n(x) = x^n \ln(x) - 1$.

Exercice 27.

Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbf{N}$, une unique solution x_n dans \mathbf{R}_+ . Étudier la convergence de la suite (x_n) .