
Remarques et erreurs communes du devoir surveillé N°1

Exercice 1

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(-1)^n \cdot (-1)^n = (-1)^{2n} = 1, \qquad \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n.$$
- Dans cet exercice, on proposait une sorte de *changement de variable*: la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence, on pose $v_n = (-1)^n u_n$, et on cherche une relation de récurrence satisfaite par (v_n) qui soit *plus simple* que la relation de récurrence qui définit (u_n). En particulier, la relation de récurrence pour (v_n) ne doit *pas* faire intervenir la suite (u_n).
- Injectivité et surjectivité: on ne peut pas dériver la fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (qui est en fait exactement la suite (u_n)) puisque son domaine de définition est $\mathbb{N}$.

Exercice 2

- Ici on avait $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, mais *pas* $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car la dérivée de la fonction f s'annule en $x = 1$. On est donc dans une situation analogue à celle de $x \to x^3$: la dérivée est strictement positive partout, sauf en un point où elle s'annule. La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en dépit de cette annulation de la dérivée en un point. Voir la correction pour une preuve détaillée. Ici on n'attendait pas une preuve aussi détaillée que dans la correction. Les copies où il était indiqué que la dérivée s'annule en un point ont eu au moins une partie des points.
- Calcul de g' : ici le plus simple est d'utiliser le théorème de dérivation des fonctions composées, par exemple en donnant un nom à la fonction qui est l'argument du logarithme dans g.
- Variations de h_1 : l'expression explicite de h_1 en fonction de x est assez compliquée, et *on n'en avait pas besoin ici.* En effet, par dérivation des fonctions composées
$$h_1'(x) = g'(f(x))f'(x),$$
et donc comme $f' > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, le signe de h_1' est celui de g' dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Limites de h_2 : En $-\infty$, on peut simplement majorer h_2 en utilisant le fait que $|\cos| \leqslant 1$:
$$|h_2(x)| \leqslant f(x)g(x),$$
et comme $fg \to 0$ en $-\infty$ par croissances comparées, on a $h_2 \to 0$ en $-\infty$.

  En $+\infty$, la situation est différente puisque $fg \to \infty$. Les grandes valeurs prises par fg sont "modulées" par le cosinus, au sens où elles sont multipliées par $\cos(x) \in [-1, 1]$. Le long d'une suite (x_n) qui tend vers $+\infty$, on a $h_2(x_n) \to +\infty$ (quelle suite (x_n) peut-on choisir?) et le long d'une suite (y_n) qui tend vers $+\infty$, on a $h_2(y_n) \to -\infty$ (quelle suite (y_n) peut-on choisir?). En particulier, h_2 n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3

- On a souvent vu dans les copies l'égalité $\ln \prod \exp = \prod \ln(\exp)$, qui est fausse: il fallait utiliser $\ln \prod_n x_n = \sum_n \ln x_n$, et comme les x_n sont des exponentielles, une simplification puis une somme téléscopique apparaissaient.

Exercice 4

- Pour traiter les sommes doubles, il est utile de faire un dessin décrivant le sous-ensemble de $\mathbb{N}^2 \subset \mathbb{R}^2$ suivant lequel on somme. Ici l'énoncé demandait explicitement un dessin. On pouvait commencer simplement par faire une liste des éléments de D_2 : ce sont les couples d'entiers (n, m), avec les contraintes $0 \leqslant m \leqslant 2$ et $0 \leqslant n \leqslant m$. Et donc on trouve, pour $m = 2$: $(0, 2)$, $(1, 2)$ et $(2, 2)$, qui sont tous des éléments de D_2; puis pour $m = 1$: on a $(0, 1)$ et $(1, 1)$ dans D_2, et enfin pour $m = 0$: le seul élément de D_2 correspondant est $(0, 0)$. Voir un dessin dans la correction.