Mathématiques - DS n°4
Partie CUPGE

Exercice 1 :

1. Réssoudre dans les complexes :
$$z^2-(7-8i)z-3-27i=0.$$
2. Soit f la rotation de centre d'affixe $2+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et g l'homothétie de centre d'affixe $2-i$ et de rapport 3.
   (a) Exprimer f et g sous la forme $z\mapsto az+b$, avec $a,b\in\mathbb{C}$ et $a\neq 0$.
   (b) Déterminer la similitude directe $g\circ f$. On donnera notamment son point fixe.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que
$$\left|\frac{z+i}{z-i}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Solution.

1. On calcule le discriminant :
$$\Delta=(7-8i)^2-4\,(-3-27i)=49-64-112i+12+108i=-3-4i.$$
On pose $\Delta=\delta^2=(a+ib)^2=a^2-b^2-i2ab$. De plus, $|\delta|=|\delta|^2=a^2+b^2$. Ceci donne
$$a^2-b^2=-3,\qquad 2ab=-4,\qquad a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5.$$
Donc $2a^2=2$ et $a=\pm1$, et $2b^2=8$ et $b=\pm2$. Puisque $2ab=-4<0$, on a $\delta=\pm(1-2i)$. Ainsi
$$z=\frac{7-8i\pm(1-2i)}{2}\in\{4-5i,3-3i\}.$$
2. (a) On a
$$f(z)=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-2-i)+2+i=i(z-2-i)+2+i=iz-2i+1+2+i=iz+3-i$$
$$g(z)=3(z-2+i)+2-i=3z-6+3i+2-i=3z-4+2i.$$
   (b) On a $(g\circ f)(z)=3(iz+3-i)-4+2i=3iz+9-3i-4+2i=3iz+5-i$.
   L'équation $z=(g\circ f)(z)$ donne $z=3iz+5-i$, d'où $(1-3i)z=5-i$ et
$$z=\frac{5-i}{1-3i}=\frac{(5-i)(1+3i)}{1^2+3^2}=\frac{5+3-i+15i}{10}=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i.$$
   Il s'agit donc d'une translation-homothétie de centre d'affixe $\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et rapport 3.
3. L'équation donne
$$\frac{1}{2}=\left|\frac{z+i}{z-i}\right|^2=\frac{(z+i)(\bar{z}-i)}{(z-i)(\bar{z}+i)}=\frac{z\bar{z}+1+i(\bar{z}-z)}{z\bar{z}+1+i(z-\bar{z})}.$$
Donc $z\bar{z}+1+i(z-\bar{z})=2(z\bar{z}+1+i(\bar{z}-z))$ et
$$0=z\bar{z}+3i(\bar{z}-z)+1=(z+3i)(\bar{z}-3i)-8=|z+3i|^2-(2\sqrt{2})^2.$$
Il s'agit donc du cercle de centre d'affixe $-3i$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Exercice 2 :

1. Calculer pgcd$(9828, 8652)$ et donner des coéfficients de Bézout.
2. Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que X est non vide.
   (b) Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
   (c) On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Soit $a = 4p_1p_2\cdots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
   (d) Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Solution.

1. On a

$$\begin{aligned} 9828 &= 8652 \cdot 1 + 1176 \\ 8652 &= 1176 \cdot 7 + \ \ 420 \\ 1176 &= \ \ 420 \cdot 2 + \ \ 336 \\ 420 &= \ \ 336 \cdot 1 + \ \ \ 84 \\ 336 &= \ \ \ 84 \cdot 4 + \ \ \ \ 0 \end{aligned}$$

   Ainsi pgcd$(9828, 8652) = 84$. 0n a

$$\begin{aligned} 84 &= 420 - 336 = 420 - (1176 - 420 \cdot 2) = 420 \cdot 3 - 1176 = (8652 - 1176 \cdot 7) \cdot 3 - 1176 \\ &= 8652 \cdot 3 - 1176 \cdot 22 = 8652 \cdot 3 - (9828 - 8652) \cdot 22 = 8652 \cdot 25 - 9828 \cdot 22. \end{aligned}$$

   Des coefficients de Bézout sont donc $(-22, 25)$.

2. (a) On a $3 \in X$ et $7 \in X$.
   (b) Un entier n est de la forme $4k+1$ pour un $k \in \mathbb{N}$ si et seulement si $n \equiv 1 \mod 4$. Donc un produit de ℓ facteurs de la forme $4k+1$ est congru à $1^\ell = 1 \mod 4$, et donc lui-même de cette forme.
   Alternative. Par récurrence sur le nombre n de facteurs.
   Initialisation : Si $n = 1$, l'énoncé est évident.
   Hypothèse : Pour $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ il y a $k \in \mathbb{N}$ avec $\prod_{i=1}^n (4k_i + 1) = 4k + 1$.
   Hérédité : Soient $k_1, \ldots, k_n, k_{n+1} \in \mathbb{N}$. Alors

$$\prod_{i=1}^{n+1} (4k_i + 1) = \Big(\prod_{i=1}^{n} (4k_i + 1)\Big) \cdot (4k_{n+1} + 1) = (4k+1)(4k_{n+1} + 1) = 4(4kk_{n+1} + k + k_{n+1}) + 1,$$

   pour un $k \in \mathbb{N}$ par l'hypothèse. Or, $4kk_{n+1} + k + k_{n+1} \in \mathbb{N}$.
   Ceci démontre l'énoncé.
   (c) Par la factorisation en facteurs premiers, a s'écrit de manière unique comme produit de facteurs premiers. Si a n'admet aucun facteur premier de la forme $4k+3$, puisque a est impair ses facteurs premiers sont tous de la forme $4k+1$, et a est de la forme $4k+1$ d'après (b). Ainsi $a \equiv 1 \mod 4$. Or, $a = 4p_1 \cdots p_n - 1 \equiv -1 \mod 4$, une contradiction. Donc a admet un facteur premier de la forme $4k+3$.
   (d) Soit p un facteur premier de a de la forme $4k+3$. Alors $p \in X$ et il y a i avec $p = p_i$. Ainsi $p_i | a$. Mais $p_i | a + 1 = 4p_1p_2 \cdots p_n - 1$, et donc $p_i | (A+1) - a = 1$, une contradiction. Ainsi X est infini.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Solution. Par récurrence, on a $f(x/2^n) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite $(f(x/2^n))_n$ est constante. Puisque $\lim_{n\to\infty} = 0$ et f est continue en 0, on a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x/2^n) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Donc f est constante.

Exercice 4 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $x = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $x < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{1/x},$$

où P_n est un polynôme.

   (a) Trouver P_1 et P_2.

   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Solution.

1. Pour $x > 0$ on a $f'(x) = 0$ puisque f est constante (égale à 0). Pour $x < 0$ on a $f'(x) = e^{1/x}(-x^{-2}) = -e^{1/x}/x^2$. En $x = 0$, on a $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, et

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -e^{1/x}/x^2 = \lim_{y\to -\infty} -e^y y^2 = 0$$

avec $y = 1/x$ par croissance comparée. D'après le théorème de prolongation dérivable $f'(0) = 0$.

2. Pour $x > 0$ on a $f''(x) = 0$, et pour $x < 0$ on a

$$f''(x) = -e^{1/x}(-x^{-2})/x^2 - e^{1/x}(-2x^{-3}) = e^{1/x}(1 + 2x)/x^4.$$

En $x = 0$, on a $\lim_{x\to 0^+} f''(x) = 0$, et

$$\lim_{x\to 0^-} f''(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{1/x}(1 + 2x)/x^4 = \lim_{y\to -\infty} e^y(y^4 + 2y^3) = 0$$

par croissance comparée. D'après le théorème de prolongation dérivable $f''(0) = 0$.

3. (a) D'après 1. et 2. on a $P_1(X) = -1$ et $P_2(X) = 1 + 2X$.

   (b) Soit $f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-2n}e^{1/x}$. Alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = (P_n(x)x^{-2n}e^{1/x})' \\ &= (P'_n(x)x^{-2n} + P_n(x)(-2nx^{-2n-1})e^{1/x} + P_n(x)x^{-2n}e^{1/x}(-x^{-2}) \\ &= (P'_n(x)x^2 - 2nP_n(x)x - P_n(x))e^{1/x}x^{-2(n+1)}. \end{aligned}$$

   Ainsi $P_{n+1}(X) = P'_n(X)X^2 - P_n(X)(2nX + 1)$.

   (c) Pour $x > 0$ on a $f^{(n)} = 0$. Pour $x < 0$ on a $f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-2n}e^{1/x}$. En 0, on a $\lim_{x\to 0^+} f^{(n)} = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0$ et

$$\lim_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0^-} P_n(x)x^{-2n}e^{1/x} = \lim_{y\to -\infty} P_n(1/y)y^{2n}e^y = 0$$

   par croissance comparée. D'après le théorème de la prolongation dérivable, $f^{(n)}$ existe sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

   Alternative. On pourrait aussi remarquer que $f^{(n)}(0) = 0$, et donc

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \Delta_{f^{(n)},0}(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f^{(n)}(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} P_n(x)x^{-2n-1}e^{1/x} = \lim_{y\to -\infty} P_n(1/y)y^{2n+1}e^y = 0 \end{aligned}$$

   par croissance comparée.