Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 7 décembre 2022

Corrigé : Devoir surveillé N°4
Durée : 1h30

Exercice 1 (4 points)

a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^2 \in]-\infty, 0]$ si et seulement si z est imaginaire pur.

b) Soient $u, v \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes distincts et tout deux de module 1. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\left(\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}\right)^2$$

est un nombre réel négatif ou nul.

Solution :

a) $z \in \mathbf{C}$ est imaginaire pur par définition si $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$. Dans ce cas on a $z^2 = i^2y^2 = -y^2 \in]-\infty, 0]$. Réciproquement, si $z^2 \in]-\infty, 0]$ alors $\sqrt{-z^2} \in [0, \infty]$ et $z = \pm i\sqrt{-z^2}$.

b) (c'est l'exercice 10 feuille 7) Par la question précédente il suffit de montrer que $\frac{z+uv\bar{z}-(u+v)}{u-v}$ est imaginaire pure. Puisque $u, v \in \mathbb{C}$ sont des nombres complexes de module 1 on a $\bar{u} = u^{-1}$ et $\bar{v} = v^{-1}$. On a

$$\overline{\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}} = \frac{\bar{z} + \bar{u}\bar{v}z - (\bar{u} + \bar{v})}{\bar{u} - \bar{v}} = \frac{z + \frac{1}{uv}\bar{z} - \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}}\frac{uv}{uv} = \frac{uvz + \bar{z} - (v+u)}{v-u},$$

c'est-à-dire

$$\overline{\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}} = -\frac{z + uv\bar{z} - (u+v)}{u-v}$$

et donc $\frac{z+uv\bar{z}-(u+v)}{u-v}$ est imaginaire pur.

Exercice 2 (4 points)

a) Soient $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $t = \tan(\frac{\theta}{2})$. Montrer que

$$e^{i\theta} = \frac{1+it}{1-it}.$$

b) Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ le cercle de centre 1/2 et de rayon 1/2. Montrer que

$$\mathcal{C}\backslash\{0\} = \left\{\frac{1}{1-it} \,|\, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Solution :

a) (c'est l'exercice 20a, feuille 7) Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $t = \tan(\frac{\theta}{2})$. On a

$$e^{i\theta} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1 + i\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1 - i\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}} = \frac{1+it}{1-it}$$

car $\cos(\theta/2) \neq 0$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.

b) (c'est l'exercice 42, feuille 7) Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ le cercle de centre 1/2 et de rayon 1/2. On a

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z - 1/2| = 1/2\} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{e^{i\theta}}{2} \,\middle|\, \theta \in [-\pi, \pi[\right\}$$

et donc

$$\mathcal{C}\backslash\{0\} = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{e^{i\theta}}{2} \;\middle|\; \theta \in]-\pi, \pi[\right\} = \left\{ \frac{1}{1-it} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

puisque

$$\frac{1}{1-it} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1+it}{1-it} = \frac{e^{i\theta}}{2}$$

pour $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ par la question précédente.

Exercice 3 (4 points)

a) Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, $m^2 \equiv 0, 1$ ou $4 \mod 8$.

b) En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 = 839$ n'admet pas de solutions entière.

Solution :

a)

m	0	1	2	3	4	5	6	7
$m^2 \mod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

b) $839 \equiv 7 \mod 8$ et 7 n'est pas la somme, modulo 8, de trois nombres, avec répétition, parmi $0, 1$ ou 4.

Exercice 4 (8 points)

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $x^2 - 2y^2 = 0$.

b) En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un couple d'entiers (a_n, b_n) tel que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

d) Montrer qu'étant donné $n \in \mathbb{N}$, le couple (a_n, b_n), trouvé à la question précédente, est unique.

e) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n, puis en déduire que $\text{pgcd}(a_{n+1}, b_{n+1})$ =$\text{pgcd}(a_n, b_n)$.

f) En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Solution :

a) Soit $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ une solution de

$$x^2 - 2y^2 = 0. \tag{1}$$

On suppose, sans perte de généralité que x, y sont premiers entre eux (sinon on les divise par leur pgcd).
Alors on a $x^2 \equiv 0 \mod 2$ et donc x^2 est pair et puisque le carré d'un nombre impair est impair on a x pair. Soit $x = 2x_1$ où $x_1 \in \mathbf{Z}$, l'équation (1) devient

$$2x_1^2 - y^2 = 0 \tag{2}$$

et on trouve que y est pair. Ceci contredit que x, y sont premier entre eux. La seule solution de (1) dans $\mathbf{Z}$ est donc $x = 0$ et $y = 0$.

b) Si $2 = p/q$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbb{N}^*$ alors (p, q) est une solution de (1) mais $q \neq 0$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule du binôme de Newton on a

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k.$$

On remarque que $\sqrt{2}^k = 2^{\frac{k}{2}} \in \mathbb{N}$ si k est pair et $\sqrt{2}^k = 2^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{2} \notin \mathbf{Z}$ si k est impair. Donc

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k = \sum_{k=0, k\text{pair}}^{n} \binom{n}{k} 2^{\frac{k}{2}} + \sqrt{2} \sum_{k=0, k\text{impair}}^{n} \binom{n}{k} 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

On obtient donc nos deux entiers

$$a_n := \sum_{k=0, k\text{pair}}^{n} \binom{n}{k} 2^{\frac{k}{2}}$$

$$b_n := \sum_{k=0, k\text{impair}}^{n} \binom{n}{k} 2^{\frac{k-1}{2}}$$

Une autre solution possible est de démontrer l'existence de (a_n, b_n) par récurrence.

d) Soit (a_n, b_n) et (c_n, d_n) deux couples d'entiers satisfaisant $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} = c_n + d_n\sqrt{2}$. Alors

$$(a_n - c_n) + (b_n - d_n)\sqrt{2} = 0$$

et $((a_n - c_n)^2, (b_n - d_n)^2)$ est une solution entière de la question 4a. Donc $a_n - c_n = 0$ et $b_n - d_n = 0$.

e) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n, puis en déduire que pgcd(a_{n+1}, b_{n+1}) =pgcd(a_n, b_n).

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) = a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2}$$

Par unicité (voir question précédente) on a $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ et ainsi le pgcd(a_n, b_n) divise le pgcd(a_{n+1}, b_{n+1}). De plus, le pgcd(a_{n+1}, b_{n+1}) divise $b_n = a_{n+1} - b_{n+1}$ et donc aussi $a_n = b_{n+1} - b_n$.

f) En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux. Par recurrence immédiate

$$\text{pgcd}(a_{n+1}, b_{n+1}) = \text{pgcd}(a_1, b_1) = 1$$

puisque $a_1 = 1$ et $b_1 = 1$.

Exercice 5 (9 point)

a) Énoncer le théorème des acroissements finis.

b) En utilisant le théorème des acroissements finis, montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x} \leqslant \ln(1+x) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$$

c) En déduire que la suite $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$. *Indication : calculer* $\sum_{k=1}^{n}(\ln(1+k) - \ln k)$.

d) Soient $u_n = S_n - \ln n$ et $v_n = S_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers un réel γ.

e) Montrer que $\gamma \in]0, 1]$.

Solution :

a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(b-a)f'(c) = f(b) - f(a).$$

b) Par le théorème des acroissements finis sur $[x, x+1]$ pour $f(t) = \ln t$, il existe $x+1 > c > x$ tel que

$$\ln(1+x) - \ln x = f'(c) = \frac{1}{c}.$$

On conclut ensuite en remarquant que $c \mapsto 1/c$ est décroissante sur $[x, x+1]$.

c) Par la question précedente on a $S_n \geqslant \sum_{k=1}^{n}(\ln(1+k) - \ln k) = \ln(n+1)$ et puisque $\ln(n+1) \to +\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on conclut, par comparaison que S_n tend vers $+\infty$.

d) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{1+n} - \ln(n+1) + \ln n \leqslant 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{1+n} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \geqslant 0$. Donc (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante. De plus

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n \to 0$$

quand n tend vers $+\infty$. Ainsi les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et par le critère des suites adjacentes, elles convergent vers un réel γ

e) Puisque (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante on a

$$0 < 1 - \ln 2 = v_1 \leqslant \gamma \leqslant u_1 = 1.$$