Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 7 décembre 2022

Devoir surveillé N°4
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarité, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées. Le barème indiqué est approximatif.

Exercice 1 (4 points)

a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^2 \in]-\infty, 0]$ si et seulement si z est imaginaire pur.

b) Soient $u, v \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes distincts et tout deux de module 1. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$,

$$\left(\frac{z + uv\overline{z} - (u+v)}{u-v}\right)^2$$

est un nombre réel négatif ou nul.

Exercice 2 (4 points)

a) Soient $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $t = \tan(\frac{\theta}{2})$. Montrer que

$$e^{i\theta} = \frac{1+it}{1-it}.$$

b) Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ le cercle de centre $1/2$ et de rayon $1/2$. Montrer que

$$\mathcal{C}\backslash\{0\} = \left\{\frac{1}{1-it} \,|\, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 3 (4 points)

a) Montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, $m^2 \equiv 0, 1$ ou $4 \mod 8$.

b) En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 = 839$ n'admet pas de solutions entière.

Exercice 4 (8 points)

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $x^2 - 2y^2 = 0$.

b) En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un couple d'entiers (a_n, b_n) tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

d) Montrer qu'étant donné $n \in \mathbb{N}$, le couple (a_n, b_n), trouvé à la question précédente, est unique.

e) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n, puis en déduire que $\text{pgcd}(a_{n+1}, b_{n+1})$ $=\text{pgcd}(a_n, b_n)$.

f) En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 5 (9 point)

a) Énoncer le théorème des acroissements finis.

b) En utilisant le théorème des acroissements finis, montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x} \leqslant \ln(1+x) - \ln x \leqslant \frac{1}{x}$$

c) En déduire que la suite $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$. *Indication : calculer* $\sum_{k=1}^{n}(\ln(1+k) - \ln k)$.

d) Soient $u_n = S_n - \ln n$ et $v_n = S_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers un réel γ.

e) Montrer que $\gamma \in]0, 1]$.