Mathématiques - DS n°3

PARTIE CUPGE

Corrigé

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et $v_n = \inf\{u_k : k \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(v_n)_n$ est croissante.
2. En déduire que $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}$, et l'expliciter. Cette quantité s'appelle $\liminf_{n\to\infty} u_n$.
3. Si $(v_n)_n$ est constante égale à ℓ à partir d'un certain rang, montrer que soit $(u_n)_n$ contient une suite extraite constante égale à ℓ, soit $(u_n)_n$ contient une suite extraite décroissante convergente vers ℓ.
4. Si $(v_n)_n$ n'est pas constante à partir d'un certain rang, montrer que $(u_n)_n$ contient une suite extraite croissante convergente vers ℓ.
5. En déduire le théorème de la suite extraite monotone.

Pour cet exercice vous n'avez pas le droit d'utiliser le théorème de la suite extraite monotone.

Solution.

1. Pour $m \leq n$ on a $\{u_k : k \geq m\} \supseteq \{u_k : k \geq n\}$, et donc $v_m = \inf\{u_k : k \geq m\} \leq \inf\{u_k : k \geq n\} = v_n$. On note que l'inf existe dans $\bar{R}$ puisque ces ensembles sont non-vides. Plus précisément, $v_n \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$
2. D'après le théorème de la suite monotone, une suite croissante a toujours une limite dans $\bar{R}$, à savoir $\ell = \lim_{n\to\infty} = \sup\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$. En particulier, si $v_n = -\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\ell = -\infty$.
3. On suppose que $v_n = \ell$ à partir d'un certain rang, mais que $(u_n)_n$ ne contient pas de suite extraite constante à ℓ. Donc $u_n > \ell$ à partir d'un certain rang N. On définit par récurrence une suite extraite $(u_{n_k})_k$. On pose $n_0 = N$, et on suppose qu'on a trouvé $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ tel que $u_{n_0} \geq u_{n_1} \geq \cdots \geq u_{n_k} > \ell$ et pour $1 \leq i \leq k$ on a $u_{n_i} \leq \ell + \frac{1}{i}$ (ou $u_{n_i} \leq -i$ si $\ell = -\infty$). Puisque $v_{n_k+1} = \inf\{u_j : j \geq n_k + 1\} = \ell$, il y a $j \geq n_k + 1$ (qu'on peut prendre minimal possible, si on veut) tel que $u_j \leq \min\{u_{n_k}, \ell + \frac{1}{k+1}\}$ (ou $u_j \leq \min\{u_{n_k}, -k-1$ si $\ell = -\infty$). On prend $n_{k+1} = j$. Ainsi $(u_{n_k})_k$ est une suite extraite décroissante qui converge vers ℓ.
4. On suppose que $(v_n)_n$ n'est pas constante à partir d'un certain rang, et donc $v_n < \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On définit par récurrence une suite extraite $(u_{m_k})_k$. Puisque $v_0 = \inf\{u_j : j \geq 0\} < \ell$ il y a $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{m_0} < \ell$. Supposons qu'on a trouvé $m_0 < m_1 < \cdots < m_k$ tel que $u_{m_0} \leq u_{m_1} \leq \cdots \leq u_{m_k} < \ell$. Puisque $\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$, il y a $m > n_k$ avec $u_{n_k} \leq v_m$. Or, $v_m = \inf\{u_j : j \geq m\} < \ell$, et il y a $j \geq m$ avec $v_m \leq u_j < \ell$, et on pose $m_{k+1} = j$. Ainsi $(u_{m_k})_k$ est croissante, majorée par ℓ et minorée par $(v_{n_k})k$; d'après le théorème des gendaremes elle converge vers ℓ.
5. D'après les parties 2. et 3., dans tous les cas $(u_n)_n$ admet une suite extraite monotone, ce qui est la conclusion du théorème de la suite extraite monotone.

Exercice 2 : Soit $(K, 0, 1, +, \times, \leq)$ un corps ordonné. Dans le cours on a montré que si K est archimédien, alors la partie entière existe pour tout $a \in K$, et on en a déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans K (en l'occurence pour $K = \mathbb{R}$). Dans cette question on vise à démontrer la réciproque.

1. Donner la définition qu'un corps ordonné K est archimédien.
2. Donner la définition que $\mathbb{Q}$ est dense dans un corps ordonné K.
3. Montrer que si $\mathbb{Q}$ est dense dans K, alors K est archimédien.

Indication : On commencera par trouver des rationnels proches des points de K.

Solution.

1. K est archimédien si pour tout $x \in K_+^\times$ et tout $y \in K$ il y a $n \in \mathbb{N}$ avec $nx \geq y$.
2. $\mathbb{Q}$ est dense dans K si pour tout $a, b \in K$ avec $a < b$ il y a $q \in \mathbb{Q}$ avec $a < q < b$.
3. Soit $x \in K_+^\times$ et $y \in K$. Si $y \leq 0$ il n'y a rien à démontrer : on prend $n = 1$. Soit donc $y > 0$. Par densité, il y a $q \in]\frac{x}{2}, x[\cap\mathbb{Q}$ et $r \in]y, y+1[\cap\mathbb{Q}$, disons $q = \frac{m_q}{n_q}$ et $r = \frac{m_r}{n_r}$ avec $m_q, n_q, m_r, n_r \in \mathbb{N}^\times$. On prend $n = n_q m_r$. Alors
$$nq = n_q m_r \frac{m_q}{n_q} \geq m_r \geq \frac{m_r}{n_r} = r.$$
Or, $0 < q < x$ et $0 < y < r$ implique $nx > nq \geq r > y$. Ainsi K est archimédien.

Exercice 3 : Soit $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. On considère une suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Trouver les points fixes de f.
2. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$.
3. Montrer que les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones, de sens opposé.
4. Montrer que $u_n > 1$ pour $n > 0$.
5. Montrer que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}\,|u_{n+1} - u_n|$.
6. En déduire que $\lim_{n\to\infty} |u_n - u_{n+1}| = 0$.
7. En déduire que $(u_n)_n$ converge, et donner sa limite.

Solution.

1. Pour $x > 0$ on a $x \geq f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ssi $x^2 \geq x + 1$ ssi $x^2 - x - 1 \geq 0$ ssi $x \geq \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} =: \alpha$. L'autre point fixe est $\frac{1-\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ce qui est négatif.
2. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pour $x > 0$, donc f est strictement décroissante.
3. On a $u_{n+2} = f(u_{n+1} = f(f(u_n))$, donc les deux suites sont données par la fonction $f \circ f$. Or, $(f \circ f)'(x) = f'(f(x))\, f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$, puisque $f' < 0$. Donc $f \circ f$ est strictement croissante.

   On montre par récurrence que si une suite $(v_n)_n$ est donné par $v_{n+1} = g(v_n)$ avec g strictement croissante, alors le signe de $v_{n+1} - v_n$ ne dépend que du signe de $v_1 - v_0$.
   Initialisation : Pour $n = 0$ il n'y a rien à démontrer.
   Hypothèse : Le signe de $v_{n+1} - v_n$ est celui de $v_1 - v_0$.
   Hérédité : Puisque g est strictement croissante, le signe de $v_{n+2} - v_{n+1} = g(v_{n+1}) - g(v_n)$ est celui de $v_{n+1} - v_n$, donc celui de $v_1 - v_0$.
   Ainsi la suite $(v_n)_n$ est monotone.

   Il en découle que les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones. Si $u_0 \leq u_2$, alors $u_1 = f(u_0) \geq f(u_2) = u_3$; de même, si Si $u_0 \geq u_2$, alors $u_1 = f(u_0) \leq f(u_2) = u_3$. Donc le sens des deux suite est opposé.
4. Puisque $u_n > 0$ on a $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} > 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |1 + \frac{1}{u_n + 1} - (1 + \frac{1}{u_n}| = |\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}}| \leq \frac{1}{2}\,|u_{n+1} - u_n|,$$
   puisque un de $u_n u_{n+1} = u_n\,(1 + \frac{1}{u_n}) = u_n + 1 \geq 2$ pour $n > 0$.
6. $\lim_{n\to\infty} |u_n - u_{n+1}| \leq \lim_{n\to\infty} 2^{-n}|u_0 - u_1| = 0$.
7. $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont deux suites monotones de sens opposé, et leur différence tend vers 0. Ce sont donc des suites adjacentes, qui d'après le théorème des suites adjacentes convergent vers une même limite ℓ. Donc $(u_n)_n$ aussi converge vers ℓ. Mais la limite de $(u_n)_n$ est un point fixe positif de f, donc égal à $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 4 : Déterminer les solutions complexes de

$$z^2 - (5 - i)z + 8 - i = 0.$$

L'utilisation d'une formule sans justification donne lieu à une déduction de points.

Solution. On calcule le déterminant

$$\Delta = (-(5 - i))^2 - 4\,(8 - i) = 25 - 1 - 10i - 32 + 4i = -8 - 6i.$$

On pose $\delta = (a + ib)$ et $-8 - 6i = \Delta = \delta^2 = a^2 - b^2 - 2ab$. En séparant partie réelle et imaginaire, on obtient $a^2 - b^2 = -8$ et $2ab = -6$. De plus,

$$a^2 + b^2 = |\delta^2| = |\Delta| = \sqrt{(-8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$

Ainsi $2a^2 = -8 + 10$ d'où $a = \pm 1$, et $2b^2 = 18$ d'où $b = \pm 3$. Puisque $2ab = -6 < 0$, les solutions sont $\delta = \pm(1 - 3i)$. Ainsi

$$z = \frac{-(-5 + i) \pm \delta}{2} = \frac{5 - i \pm (1 - 3i)}{2}$$

et les solutions sont $z_1 = 3 - 2i$ et $z_2 = 2 + i$.

Exercice 5 : On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \cosh(\ln(x) - 1).$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Donner la parité de f. La fonction f est-elle périodique ?
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
4. Calculer la fonction dérivée de f.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
7. Dresser le graphe de f.

Solution.

1. ln est défini sur $\mathbb{R}_+^\times$ et cosh sur $\mathbb{R}$. Le domaine maximal est donc $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_+^\times$.
2. $\operatorname{dom} f$ n'est pas symétrique, il n'y a donc pas de parité. De plus, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (voir 3.), et f ne peut pas être périodique.
3. On note que
$$f(x) = \cosh(\ln(x) - 1) = \frac{e^{\ln(x)-1} + e^{-\ln(x)+1}}{2} = \frac{\frac{x}{e} + \frac{e}{x}}{2} = \frac{x}{2e} + \frac{e}{2x}.$$
Ce qui donne $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$.
4. On calcule la dérivée :
$$f'(x) = \sinh(\ln(x) - 1)\,\frac{1}{x} = \frac{e^{\ln(x)-1} - e^{-\ln(x)+1}}{2x} = \frac{1}{2e} - \frac{e}{2x^2}.$$
Ce qui donne le même résultat que si on calcule la dérivée de $\frac{x}{2e} + \frac{e}{2x}$.
5. On a $f'(x) \geq 0$ ssi $\frac{1}{2e} \geq \frac{e}{2x^2}$ ssi $2x^2 \geq 2e^2$ ssi $x \geq e$, avec égalité ssi $x = e$. De plus, $f(e) = \cosh(\ln(e) - 1) = \cosh(1 - 1) = \cosh(0) = 1$. Donc

x	0		e		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞

6. On a une asymptôte verticale en $x = 0$.
En $x \to \infty$ on calcule :
$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2e} + \frac{e}{2x^2}\right) = \frac{1}{2e},$$
et
$$b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2e}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e}{2x} = 0.$$
Il y a donc une asymptôte affine de la forme $y = \frac{x}{2e}$.
7.