**Université Claude Bernard Lyon 1** Semestre d'automne 2022-2023
Cursus prépa - Première année

---

# Mathématiques - DS n°3
## Partie CUPGE

---

**Exercice 1 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, et $v_n = \inf\{u_k : k \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(v_n)_n$ est croissante.
2. En déduire que $\ell = \lim_{n\to\infty} v_n$ existe dans $\bar{\mathbb{R}}$, et l'expliciter. Cette quantité s'appele $\liminf_{n\to\infty} u_n$.
3. Si $(v_n)_n$ est constante égale à $\ell$ à partir d'un certain rang, montrer que soit $(u_n)_n$ contient une suite extraite constante égale à $\ell$, soit $(u_n)_n$ contient une suite extraite décroissante convergente vers $\ell$.
4. Si $(v_n)_n$ n'est pas constante à partir d'un certain rang, montrer que $(u_n)_n$ contient une suite extraite croissante convergente vers $\ell$.
5. En déduire le théorème de la suite extraite monotone.

Pour cet exercice vous n'avez pas le droit d'utiliser le théorème de la suite extraite monotone.

**Exercice 2 :** Soit $(K, 0, 1, +, \times, \leq)$ un corps ordonné. Dans le cours on a montré que si $K$ est archimédien, alors la partie entière existe pour tout $a \in K$, et on en a déduit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $K$ (en l'occurence pour $K = \mathbb{R}$). Dans cette question on vise à démontrer la réciproque.

1. Donner la définition qu'un corps ordonné $K$ est archimédien.
2. Donner la définition que $\mathbb{Q}$ est dense dans un corps ordonné $K$.
3. Montrer que si $\mathbb{Q}$ est dense dans $K$, alors $K$ est archimédien.

Indication : On commencera par trouver des rationnels proches des points de $K$.

**Exercice 3 :** Soit $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. On considère une suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Trouver les points fixes de $f$.
2. Montrer que $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones, de sens opposé.
4. Montrer que $u_n > 1$ pour $n > 0$.
5. Montrer que $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_{n+1} - u_n|$.
6. En déduire que $\lim_{n\to\infty} |u_n - u_{n+1}| = 0$.
7. En déduire que $(u_n)_n$ converge, et donner sa limite.

**Exercice 4 :** Déterminer les solutions complexes de

$$z^2 - (5 - i)z + 8 - i = 0.$$

L'utilisation d'une formule sans justification donne lieu à une déduction de points.

**Exercice 5 :** On considère la fonction réelle

$$f : x \mapsto \cosh(\ln(x) - 1).$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Donner la parité de $f$. La fonction $f$ est-elle périodique ?
3. Étudier les éventuelles limites de $f$ aux bornes de son domaine maximal.
4. Calculer la fonction dérivée de $f$.
5. Donner le tableau de variations de $f$.
6. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
7. Dresser le graphe de $f$.