Devoir surveillé N°3
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x = \sqrt{k}$. On suppose que $x = \frac{m}{n}$ où $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et la fraction $\frac{m}{n}$ est irreductible. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est à dire le plus grand entier p tel que $p \leqslant x$.

Enfin on pose $n' = n(x - \lfloor x \rfloor)$.

1. Montrer que $n' \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $0 \leqslant n' < n$.
3. Montrer que $n'x \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $n' = 0$.
5. En déduire que la racine carrée d'un entier positif est soit un entier positif, soit un irrationnel.

Corrigé (7pts/30)

1. Par définition $\lfloor x \rfloor \leqslant x$, donc $n' \geqslant 0$. De plus $nx = m$ et $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$, donc $n' = m - n\lfloor x \rfloor$ est un entier.
2. Par définition $x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $x - \lfloor x \rfloor < 1$ et ainsi $n' < n$.
3. $n'x = nx^2 - nx\lfloor x \rfloor = nk - m\lfloor x \rfloor$ et c'est donc un entier.
4. Si $n' \neq 0$ alors, comme a montré que $n'x \in \mathbb{N}$, on a $x = \frac{m'}{n'}$ avec $n' < n$. Ce qui est impossible vu que la fraction $x = \frac{m}{n}$ était supposée irréductible.
5. On a montré que si $x = \sqrt{k}$ appartient à $\mathbf{Q}$ alors $n' = 0$, c'est à dire $x = \lfloor x \rfloor$ ou encore $x \in \mathbb{N}$. Sinon, $x = \sqrt{k} \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Exercice 2 Soit A un partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\inf\{|x-y|\,;\ y \in A\}$ existe. On note cette quantité $\mathrm{d}(x, A)$.
2. Montrer que si A est majoré, alors $\mathrm{d}(\sup A, A) = 0$.
3. (a) Soient $x, x' \in \mathbb{R}$. Montrer que $|x-y| \leqslant |x-x'| + |x'-y|$ pour tout $y \in A$.
   (b) En déduire que $\mathrm{d}(x, A) \leqslant |x-x'| + |x'-y|$ pour tout $y \in A$.
   (c) En déduire que $\mathrm{d}(x, A) \leqslant |x-x'| + \mathrm{d}(x', A)$.
   (d) Montrer que $|\mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(x', A)| \leqslant |x-x'|$.

Corrigé (9 pts/30)

1. A est non vide donc $\{|x-y|\,;\ y \in A\}$ contient au moins un élément et est donc non vide. Il est aussi minoré par 0. Donc l'inf de cet ensemble existe.
2. Si A est majoré (et non vide) alors $\sup A$ existe. On sait que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $y \in A$ tel que $|\sup A - y| < \epsilon$. Donc $d(\sup A, A) \leqslant \epsilon$. Comme cela est vrai pour tout $\epsilon > 0$, cela prouve que $d(\sup A, A) = 0$.
3. (a) $|x-y| = |x-x'+x'-y| \leqslant |x-x'| + |x'-y|$ par inégalité triangulaire.
   (b) Comme $d(x, A)$ minore tous les termes $|x-y|$ on a $d(x, A) \leqslant |x-x'| + |x'-y|$.
   (c) On a montré que $d(x, A) - |x-x'| \leqslant |x'-y|$ pour tout $y \in A$. Le terme de gauche est donc un minorant de $\{|x-y|\,;\ y \in A\}$. Il est donc plus petit que $d(x', A)$ qui est le plus grand des minorants.
   (d) On a prouvé que $d(x, A) - d(x', A) \leqslant |x-x'|$. Comme c'est valable pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$, on a donc aussi (en échangeant les rôles de x et x') $d(x', A) - d(x, A) \leqslant |x'-x| = |x-x'|$. Ce qui prouve que $|\mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(x', A)| \leqslant |x-x'|$.

Exercice 3 On considère la fonction
$$f(x) = \frac{x^3+1}{3}$$
ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet trois solution réelles (que l'on ne cherchera pas à exprimer explicitement) que l'on notera $\alpha < \beta < \gamma$.
2. Montrer que les intervalles $]-\infty, \alpha[$, $]\alpha, \beta[$, $]\beta, \gamma[$, $]\gamma, +\infty[$ sont stables par f.
3. Etudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de x.
4. En déduire le comportement complet de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0 (monotonie, convergences et limites, ou divergences éventuelles).

Corrigé (8pts/30)

1. $f(x) = x$ revient à $x^3 - 3x + 1 = 0$. On étudie la fonction $x^3 - 3x + 1$ de dérivée $3x^2 - 3$. La dérivée est positive pour $x \leqslant -1$ et pour $x \geqslant 1$, elle est négative pour $x \in [-1, 1]$. On en déduit le tableau de variation de $x^3 - 3x + 1$ et on voit facilement (T.V.I.) que cette fonction passe par 0 une fois dans l'intervalle $]-\infty, -1[$, une fois dans l'intervalle $]-1, 1[$ et une fois dans l'intervalle $]1, +\infty[$.
2. La dérivée de f est x^2 donc f est croissante. De plus f laisse stable les 3 points α, β, γ. Donc les intervalles $]-\infty, \alpha[$, $]\alpha, \beta[$, $]\beta, \gamma[$, $]\gamma, +\infty[$ sont stables par théorème du cours.
3. L'étude de la fonction $f(x) - x$ a déjà été faite pour la question 1. On obtient facilement qu'elle est négative sur $]-\infty, \alpha[$, positive sur $]\alpha, \beta[$, négative sur $]\beta, \gamma[$, positive sur$]\gamma, +\infty[$.
4. Si $u_0 = \alpha, \beta$ ou γ alors (u_n) est constante.
   Si $u_0 \in]-\infty, \alpha[$, alors $(u_n) \subset]-\infty, \alpha[$ par stabilité de l'intervalle et (u_n) est décroissante par signe de $f(x) - x$. Deux possibilité pour cette suite décroissante, soit elle est minorée et donc converge vers un point fixe de f, soit elle tend vers $-\infty$. Comme il n'y a pas de point fixe de f dans cet intervalle, alors c'est que (u_n) tend vers $-\infty$.
   Par des raisonnements similaires on a que
   - Si $u_0 \in]\alpha, \beta[$, alors (u_n) est croissante et converge vers β
   - Si $u_0 \in]\beta, \gamma[$, alors (u_n) est décroissante et converge vers β
   - Si $u_0 \in]\gamma, +\infty[$, alors (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$.

Exercice 4 On considère la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\arctan(x)}{2} \end{array}.$$

On définit la suite suivante par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

1. Etudier la croissance/décroissance, ainsi que la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0.
2. Calculer $f'(0)$.
3. On suppose maintenant que $u_0 > 0$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\,.$$
4. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}\, u_n$.
5. En déduire qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $u_n \leqslant K\, \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Corrigé (15pts/30)

1. La dérivée de f est $\frac{1}{2(1+x^2)}$ donc f est strictement croissante.
La fonction $f(x) - x$ a pour dérivée $\frac{1}{2}\frac{-(1+2x^2)}{1+x^2}$ qui est strictement négative. Donc $f(x) - x$ est strictement décroissante. Les limites de $f(x) - x$ en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$. On voit de plus immédiatement que $f(0) = 0$ ainsi 0 est le seul point fixe de f.
Par croissance de f on a la stabilité des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par f.
– Si $u_0 = 0$ alors (u_n) est constante.
– Si $u_0 < 0$ alors (u_n) est croissante et tend vers 0.
– Si $u_0 > 0$ alors (u_n) est décroissante et tend vers 0.
2. $f'(0) = \frac{1}{2}$.
3. Si $u_0 > 0$, on sait déjà que $u_n > 0$ pour tout n et que (u_n) tend vers 0. On a donc
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(u_n) - f(0)}{u_n - 0}$$
qui tend vers $f'(0) = \frac{1}{2}$.
4. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $1/2$, donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1/2 + \epsilon$. En prenant $\epsilon = 1/6$ on obtient le résultat demandé.
5. On a $u_{N+1} \leqslant \frac{2}{3}\, u_N$, puis $u_{N+2} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2 u_N$ et par récurrence $u_{N+k} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k u_N$. Ou encore, pour $n > N$
$$u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-N} u_N = \left(\frac{2}{3}\right)^{-N} u_N \left(\frac{2}{3}\right)^n = K\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
6. $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} > 0$ donc (v_n) est croissante.
7.
$$v_n = \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} K\left(\frac{2}{3}\right)^k \tag{1}$$
$$= C + K\frac{(2/3)^{N+1} - (2/3)^{n+1}}{1 - 2/3} \leqslant C + 3K\left(\frac{2}{3}\right)^{N+1}. \tag{2}$$
Ainsi (v_n) est bornée. Croissante et bornée donc convergente.