Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2022-2023

Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 — 16 novembre 2022

Devoir surveillé N°3
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x = \sqrt{k}$. On suppose que $x = \frac{m}{n}$ où $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et la fraction $\frac{m}{n}$ est irreductible. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est à dire le plus grand entier p tel que $p \leqslant x$.

Enfin on pose $n' = n(x - \lfloor x \rfloor)$.

1. Montrer que $n' \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $0 \leqslant n' < n$.
3. Montrer que $n'x \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $n' = 0$.
5. En déduire que la racine carrée d'un entier positif est soit un entier positif, soit un irrationnel.

Exercice 2 Soit A un partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\inf\{|x-y|\,;\ y \in A\}$ existe. On note cette quantité $\mathrm{d}(x, A)$.
2. Montrer que si A est majoré, alors $\mathrm{d}(\sup A, A) = 0$.
3. (a) Soient $x, x' \in \mathbb{R}$. Montrer que $|x-y| \leqslant |x-x'| + |x'-y|$ pour tout $y \in A$.
   (b) En déduire que $\mathrm{d}(x, A) \leqslant |x-x'| + |x'-y|$ pour tout $y \in A$.
   (c) En déduire que $\mathrm{d}(x, A) \leqslant |x-x'| + \mathrm{d}(x', A)$.
   (d) Montrer que $|\mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(x', A)| \leqslant |x-x'|$.

Exercice 3 On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^3+1}{3}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet trois solution réelles (que l'on ne cherchera pas à exprimer explicitement) que l'on notera $\alpha < \beta < \gamma$.
2. Montrer que les intervalles $]-\infty, \alpha[$, $]\alpha, \beta[$, $]\beta, \gamma[$, $]\gamma, +\infty[$ sont stables par f.
3. Etudier le signe de $f(x) - x$ en fonction de x.
4. En déduire le comportement complet de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0 (monotonie, convergences et limites, ou divergences éventuelles).

Exercice 4 On considère la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\arctan(x)}{2} \end{array}.$$

On définit la suite suivante par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

1. Etudier la croissance/décroissance, ainsi que la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0.
2. Calculer $f'(0)$.
3. On suppose maintenant que $u_0 > 0$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\,.$$
4. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}\, u_n$.
5. En déduire qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $u_n \leqslant K\, \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
7. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.