Mathématiques - DS n°2
Partie CUPGE

Exercice 1 :

1. Montrer que si $f : X \to Y$ est une application avec Y fini, tel que tout $y \in Y$ a précisément k antécédants, alors X est fini de cardinal $k \cdot \#Y$.
2. Soit X un ensemble fini de cardinal n, et $p \leq n$ un entier.
   (a) Définir un p-*arrangement* et une p-*combinaison* d'éléments de X.
   (b) Donner (sans preuve) une formule pour le nombre de p-arrangements.
   (c) Soit f la fonction qui à tout p-arrangement d'éléments de X associe la p-combinaison de ses éléments. Calculer le nombre d'antécédants sous f d'une p-combinaison donnée.
   (d) En déduire le nombre total de p-combinaisons d'éléments de X. Une formule sans justification, même correcte, donne lieu à une déduction de points.

Solution.

1. Par récurrence sur $\#Y$.
   Initialisation : Si $\#Y = 0$, alors $Y = \emptyset$, ce qui implique $X = \emptyset$ et $\#X = 0 = k \cdot \#Y$.
   Hypothèse : On suppose vrai pour des ensembles d'arrivée de cardinal n.
   Hérédité : Si $\#Y = n+1$, alors $Y \neq \emptyset$. Soit $y_0 \in Y$. On pose $Y' = Y \setminus \{y_0\}$ et $X' = f^{-1}[Y']$. Puisque pour tout $x \in X$ soit $f(x) = y_0$, soit $f(x) \in Y'$ (mais pas les deux), on a $X = X' \cup f^{-1}[\{y_0\}]$ et la réunion est disjointe. De plus, dans la restriction $f : X' \to Y'$ chaque $y \in Y'$ a précisément k antécédants. Puisque $\#Y' = n$, par hypothèse $\#X' = k \cdot \#Y' = kn$. Ainsi
   $$\#X = \#X' + \#f^{-1}[\{y_0\}] = kn + k = k\,(n+1) = k \cdot \#Y.$$
   D'après le principe de récurrence, l'énoncé est vrai.
2. (a) Un p-arrangement d'éléménts de X est un p-uplet d'éléments disticts de X ; une p-combinaison est une partie de X de cardinal p.
   (b) Si $\#X = n$, il y a $n!/(n-p)!$ p-arrangements.
   (c) Soit $\{x_1, \dots, x_p\}$ une p-combinaison. Alors il y a $p!/(p-p)! = p!$ p-arrangements de ces p éléments. Ceci sont tous les antécédants de cette p-combinaison. Chaque p-combinaison a donc $p!$ antécédants.
   (d) D'après le résultat de la partie 1., le nombre de p-arrangements et $p!$ fois le nombre de p-combinaisons. Il y a donc $n!/[(n-p)!\,p!]$ p-combinaisons d'éléménts de X, où $n = \#X$.

Exercice 2 : Soit X un ensemble, et $A, B, C \subseteq X$. On appelle *différence symétrique* de A et B l'ensemble $A \triangle B = \{x \in A \cup B : x \notin A \cap B\}$.

1. Montrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ et que $A \triangle B = B \triangle A$.
2. Calculer $A \triangle A$, $A \triangle \emptyset$, $A \triangle X$ et $A \triangle (X \setminus A)$.
3. Montrer que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
4. (Bonus) En déduire que $(\mathcal{P}(X), \emptyset, \triangle)$ est un groupe commutatif.

Solution.

1. Soit $x \in A \triangle B$.
   1er cas : $x \in A$. Puisque $x \notin A \cap B$, on a $x \notin B$, et donc $x \in A \setminus B$.
   2me cas : $x \notin A$. Puisque $x \in A \cup B$, on a $x \in B$, et donc $x \in B \setminus A$.
   Dans les deux cas, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, et $A \triangle B \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
   Réciproquement, soit $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
   Si $x \in A \setminus B$, alors $x \in A \subseteq A \cup B$, et $x \notin B$, d'où $x \notin B \cap A$.
   Sinon, $x \in B \setminus A$. Alors $x \in B \subseteq A \cup B$, et $x \notin A$, d'où $x \notin A \cap B$.
   Dans les deux cas, $x \in A \triangle B$, et $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \triangle B$.

2. $A \triangle A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.
   $A \triangle \emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A \setminus \emptyset = A$.
   $A \triangle X = (A \cup X) \setminus (A \cap X) = X \setminus A$.
   $A \triangle (X \setminus A) = (A \cup (X \setminus A)) \setminus (A \cap (X \setminus A)) = X \setminus \emptyset = X$.
3. On pose $X_1 = A \setminus (B \cup C)$, $X_2 = B \setminus (A \cup C)$, $X_3 = C \setminus (A \cup B)$, $X_{12} = (A \cap B) \setminus C$, $X_{23} = (B \cap C) \setminus A$, $X_{13} = (A \cap C) \setminus B$ et $X_{123} = A \cap B \cap C$. Ce sont les parties dans le diagramme de Venn qui partitionnent $A \cup B \cup C$. Par exemple $A = X_1 \cup X_{12} \cup X_{13} \cup X_{123}$, et de même pour B et C. Alors $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (X_1 \cup X_{13}) \cup (X_2 \cup X_{23})$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
(A \triangle B) \triangle C) &= (X_1 \cup X_{13} \cup X_2 \cup X_{23}) \triangle (X_3 \cup X_{13} \cup X_{23} \cup X_{123}) \\
&= (X_1 \cup X_{13} \cup X_2 \cup X_{23} \cup X_3 \cup X_{13} \cup X_{23} \cup X_{123}) \setminus [(X_1 \cup X_{13} \cup X_2 \cup X_{23}) \cap (X_3 \cup X_{13} \cup X_{23} \cup X_{123})] \\
&= (X_1 \cup X_{13} \cup X_2 \cup X_{23} \cup X_3 \cup X_{13} \cup X_{23} \cup X_{123}) \setminus (X_{13} \cup X_{23}) = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_{123}.
\end{aligned}
$$

   Clearly $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A) = B \triangle A$. Ainsi par symétrie

$$
(A \triangle B) \triangle C = C \triangle (A \triangle B) = X_3 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_{123}
$$

   et on a bien $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
4. La partie 3. montre que $\triangle : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ qui est associative et commutative. La partie 2. montre que $\emptyset$ est élément neutre, et A lui-même est l'élément inverse de A. Toutres les axiomes d'un groupe commutatif sont donc satisfaits.

Exercice 3 :

1. Montrer que la proposition suivante est vraie

$$
P \leftrightarrow \big[(Q \to P) \wedge (R \to P) \wedge (P \vee Q \vee R)\big].
$$

2. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.
   (a) Exprimer à l'aide de quantificateurs : S'il y a $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-b \leq u_n \leq b$, alors il y a $\ell \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $N > 0$ il y a $n \geq N$ avec $|\ell - u_n| \leq \frac{1}{N}$.
   (b) Former la négation de cet énoncé.
   (c) (Bonus) Reconnaissez-vous le théorème de la partie 2.(a) ?

Solution.

1. Par table de vérité. On pose $S = (Q \to P) \wedge (R \to P) \wedge (P \vee Q \vee R)$.

P	Q	R	$Q \to P$	$R \to P$	$P \vee Q \vee R$	S	$P \leftrightarrow S$
V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V
V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F	V

   La dernière colonne est toujours vraie. L'énoncé est donc vrai.
2. (a) $(\exists\, b \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N},\ -b \leq u_n \leq b) \to (\exists\, \ell \in \mathbb{R} \forall N \in \mathbb{N}^\times\, \exists\, n \geq N,\ |\ell - u_n| \leq \frac{1}{N})$.
   (b) $(\exists\, b \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N},\ -b \leq u_n \leq b) \wedge (\forall \ell \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N}^\times\, \forall n \geq N,\ |\ell - u_n| > \frac{1}{N})$, ou
   $\exists\, b \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N}\, \forall \ell \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N}^\times\, \forall m \geq N\ \ -b \leq u_n \leq b \wedge |\ell - u_m| > \frac{1}{N}$.
   (c) C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass : Si la suite est bornée, il existe une suite extraite convergente.

Exercice 4 : On considère la fonction réelle

$$
f : x \mapsto \ln(\cosh(x) - 1).
$$

1. Donner le domaine de définition maximal.
2. Donner la parité de f. La fonction f est-elle périodique ?
3. Étudier les éventuelles limites de f aux bornes de son domaine maximal.
4. Calculer la fonction dérivée de f.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Calculer ses asymptôtes éventuelles.
7. Dresser le graphe de f.

Solution.

1. $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}^\times$, puisque $\cosh(x) \geq 1$ avec égalité ssi $x = 0$, et $\ln x$ est définie ssi $x > 0$.
2. cosh est paire, donc f aussi : $f(-x) = \ln(\cosh(-x) - 1) = \ln(\cosh(x) - 1) = f(x)$. Puisque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ (voire 3.) et f n'est pas constante, f ne peut pas être périodique.
3. On a $\lim_{x\to\pm\infty} \cosh(x) = \infty$ et $\lim_{x\to\pm\infty} \ln x = \infty$, donc $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$.
   On a $\lim_{x\to\pm\infty} \cosh(x) - 1 = 0^+$, donc par composition $\lim_{n\to 0} f(x) = \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$.
4. On a $f'(x) = \frac{(\cosh(x)-1)'}{\cosh(x)-1} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)-1}$.
5. On a $\cosh(x) - 1 > 0$ sur $\mathbb{R}^\times$, et $\sinh(x) < 0$ pour $x < 0$, $\sinh(0) = 0$ et $\sinh(x) > 0$ pour $x > 0$. Donc

x	$-\infty$			0			∞
$f'(x)$		$-$		$\vert$		$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$-\infty$	$\vert$	$-\infty$	$\nearrow$	∞

6. Il y a une asymptôte verticale en $x = 0$.
   Quant aux asympôtes affines, on calcule :

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\cosh(x) - 1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x(\frac{1+e^{-2x}}{2} - e^{-x})}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln(\frac{1+e^{-2x}}{2} - e^{-x})}{x} = 1.$$

   et

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} (\ln(\cosh(x) - 1)) - x) = \lim_{x\to\infty} (x + \ln\left(\frac{1+e^{-2x}}{2} - e^{-x}\right) - x) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

   Il y a donc une asympôte affine $y = x - \ln 2$ en ∞, et par parité une autre $y = -x - \ln 2$ en $-\infty$.

7.