Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 19 octobre 2022

Devoir surveillé N°2
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarité, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 **A** *Soient a et b deux nombres réels. Voici une proposition les concernant : si $a+b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

1. *Écrire la contraposée de la proposition.*
2. *Démontrer la proposition par la méthode de la contraposée.*
3. *Est-ce que l'implication inverse est vraie ? Une simple réponse "oui" ou "non" sans justification ne sera pas acceptée.*

Réponse :
1. Si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$ alors $a+b \in \mathbb{Q}$.
2. Il suffit donc de vérifier l'implication du point précédent. Soient a et b deux nombres rationnels. Il existe alors $m_a, m_b \in \mathbb{Z}$ et $n_a, n_b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $a = \frac{m_a}{n_a}$ et $b = m_b/n_b$. Alors $a+b = \frac{m_a n_b + m_b n_a}{n_a n_b}$. Par ailleurs $m_a n_b + m_b n_a \in \mathbb{Z}$, $n_a n_b \in \mathbb{Z}^*$. Donc leur quotient est un nombre rationnel.

B *Montrer par l'absurde que l'équation suivante n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$:*

$$x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$$

Réponse : Supposons par l'absurde qu'il existe un entier relatif k tel que $k^3 + k^2 + 2k - 3 = 0$. Alors $k^3 + k^2 + 2k = 3$, soit encore, $k(k^2 + k + 2) = 3$. Par conséquent k est un diviseur de 3. Il y a 4 possibilités : $-3, -1, 1, 3$. Par direct calcul on peut voir que dans pour aucune valeur de k, la valeur de $k^2 + k + 2$ n'est un diviseur de 3. Ceci contredit que $k^2 + k + 2$ est aussi un diviseur de 3.

Exercice 2 *Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les énoncés suivants :*

1. *La fonction f s'annule en 3 entiers distincts.*
   Réponse : $\exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3, f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 0$ et $f(x_3) = 0$ et $x_1 \neq x_2$ et $x_1 \neq x_3$ et $x_2 \neq x_3$.
2. *La fonction f s'annule en exactement 3 entiers.*
   Réponse : $\exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3, (f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 0$ et $f(x_3) = 0$ et $x_1 \neq x_2$ et $x_1 \neq x_3$ et $x_2 \neq x_3)$ et $(\forall y \in \mathbb{Z}, f(y) = 0 \Rightarrow (y = x_1$ ou $y = x_2$ ou $y = x_3))$.
3. *L'image directe de f ne contient que des nombres entiers qui sont carrés d'un entier.*
   Réponse : $\forall y \in \mathbb{Z}, (\exists x \in \mathbb{Z}\ f(x) = y) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}\ k^2 = y)$.
4. *L'image directe de f est exactement l'ensemble des nombres entiers qui sont carrés d'un entier.*
   Réponse : $\forall y \in \mathbb{Z}, (\exists x \in \mathbb{Z}\ f(x) = y) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}\ k^2 = y)$.

Exercice 3 *Soient E un ensemble et A, B et C sous-ensembles de E.*

1. *Montrer l'implication suivante :*

$$\left[A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C \right] \Rightarrow B = C\ .$$

   Réponse : On admet l'hypothèse de l'implication et on essaye de montrer que $B = C$. Comme c'est une égalité d'ensembles, il faut vérifier que $B \subseteq C$ et $C \subseteq B$. Les deux inclusions se démontrent de la même façon quitte à échanger les rôles respectifs de B et C, et nous nous contenterons de montrer que $B \subseteq C$. Soit $b \in B$. Alors, soit $b \in A$ et donc $b \in B \cap A$, soit $b \notin A$. Dans le premier cas, comme $B \cap A = A \cap C$, $b \in C$ aussi. Dans le deuxième cas, $b \in B \setminus A \subseteq (A \cup B) \setminus A = (A \cup C) \setminus A$. Il n'y a alors qu'une seul possibilité : $b \in C$ encore une fois.

2. *Montrer l'égalité suivante :* $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

   Réponse :

$$
\begin{aligned}
A \setminus (B \setminus C) &= A \setminus (B \cap (E \setminus C)) \\
&= A \cap (E \setminus (B \cap (E \setminus C))) \\
&= A \cap ((E \setminus B) \cup C) \quad \text{(de Morgan)} \\
&= (A \cap (E \setminus B)) \cup (A \cap C) \\
&= (A \setminus B) \cup (A \cap C)\ .
\end{aligned}
$$

3. *Soit* f *une fonction de* E *dans* F. *Montrer que* $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

   Réponse : Il y avait une faute de frappe dans l'énoncé. F aurait dû être E. Montrons l'égalité voulue à partir de cette correction. Soit $x \in E$. Alors $x \in f^{-1}[A \setminus B]$ si et seulement si $f(x) \in A \setminus B$ si et seulement si $f(x) \in f[A]$ et $f(x) \notin f[B]$ si et seulement si $x \in f^{-1}[A]$ et $x \notin f^{-1}[B]$ si et seulement si $x \in f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

Exercice 4 *On définit la fonction suivante :*

$$
\begin{array}{rcccc}
f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & x & \longmapsto & \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)
\end{array}
$$

1. *Déterminer le domaine maximal de définition de* f.

   Réponse : La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ tandis que $\frac{x+1}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors le domaine maximal de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. *Déterminer les limites de* f *aux bornes du domaine maximal de* f.

   Réponse : Notons d'abord qu'en $+\infty$ et qu'en $-\infty$, la limite de $\frac{x+1}{x-1}$ est 1. Comme arctan est continue $\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \arctan\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

3. *Déterminer la dérivée de* f.

   Réponse : Une application de la règle de la composée montre que la dérivée est

$$
\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2+(x+1)^2} = \frac{-1}{x^2+1} \quad .
$$

4. *Dresser le tableau de variations de* f.

   Réponse :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	‖	-	
$f(x)$	$\frac{\pi}{4}$	↘	$-\frac{\pi}{2}$ ‖ $\frac{\pi}{2}$	↘	$\frac{\pi}{4}$

5. *Trouver les solutions de l'équation* $f(x) = 0$ *ainsi que de* $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

   Réponse : $\arctan(u) = 0$ si et seulement si $u = 0$. Pour $u = \frac{x+1}{x-1}$ ceci équivaut à ce que $x = -1$. $\arctan(u) = \frac{\pi}{4}$ si et seulement si $u = 1$. On vérifie par l'absurde que ceci est impossible (exercice). La deuxième équation n'a donc pas de solution.

6. *Montrer que* f *est injective.*

   Réponse : Bien que sa dérivée soit négative partout où elle est définie la fonction n'est pas décroissante parce qu'elle a un point de discontinuité en $x = 1$. Si on veut raisonner à partir de la négativité de la dérivée, il faut donc diviser le raisonnement en plusieurs morceaux. On peut néanmoins raisonner directement. Si pour x, y dans le domaine de f on a l'égalité $\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \arctan\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$, alors par l'injectivité de l'arctangente, on a $\frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1}$. Ceci équivaut à $xy - x + y - 1 = xy - y + x - 1$. On en déduit que $x = y$.

7. *Tracer le graphe de* f.

Exercice 5 *Soit E un ensemble fini à n éléments où $n \in \mathbb{N}^*$.*

1. *Soit A un sous-ensemble non vide de E de cardinal a. Montrer que le nombre de sous-ensembles B de E tels que $Card(A \cap B) = 1$ est $a2^{n-a}$.*

   Réponse : Pour tout sous-ensemble B de E, $\mathrm{Card}(B \cap A) = 1$ si et seulement si il existe $B' \subseteq E$ et $a \in A$ tel que $B = B' \cup \{a\}$ et $B' \cap A = \emptyset$. Il suffit donc de compter les sous-ensembles de $E \setminus A$ et de les mettre avec les éléments de A. En effet, l'application qui associe à chaque paire (a, B') avec $a \in A$ et $B' \subseteq E \setminus A$ est une bijection entre $A \times \mathcal{P}(E \setminus A)$ et l'ensemble $\{B \subseteq E \mid \mathrm{Card}(A \cap B) = 1\}$. Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E \setminus A))$ est 2^{n-a}, on conclut que $\mathrm{Card}\{B \subseteq E \mid \mathrm{Card}(A \cap B) = 1\} = a2^{n-a}$

2. *En faisant une somme paramétrée par a, déduire du premier point de l'exercice que le cardinal de l'ensemble des paires $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ telles que $Card(A \cap B) = 1$ est $n3^{n-1}$.*

   Réponse : La somme $\Sigma_{a=1}^{n} \binom{n}{a} a2^{n-a}$ est le cardinal recherché. On calcule :

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{a=1}^{n} \binom{n}{a} a2^{n-a} &= \Sigma_{a=1}^{n} \frac{n!}{a!(n-a)!} a2^{n-a} \\
&= \Sigma_{a=1}^{n} \frac{n!}{(a-1)!(n-a)!} 2^{n-a} \\
&= \Sigma_{a=0}^{n} \frac{n!}{a!(n-a-1)!} 2^{n-a-1} \\
&= n\Sigma_{a=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{a!(n-1-a)!} 2^{n-1-a} \\
&= n\Sigma_{a=0}^{n-1} \binom{n-1}{a} 2^{n-1-a} \\
&= n3^{n-1} \ .
\end{aligned}
$$