Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Cursus préparatoire : Fondamentaux des Mathématiques 1 19 octobre 2022

Devoir surveillé N°2
Durée : 1h30

On attachera la plus grande importance à la clarité, à la précision et à la conclusion de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 **A** Soient a et b deux nombres réels. Voici une proposition les concernant : si $a+b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ou $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Écrire la contraposée de la proposition.
2. Démontrer la proposition par la méthode de la contraposée.
3. Est-ce que l'implication inverse est vraie ? Une simple réponse "oui" ou "non" sans justification ne sera pas acceptée.

B Montrer par l'absurde que l'équation suivante n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$:

$$x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les énoncés suivants :

1. La fonction f s'annule en 3 entiers distincts.
2. La fonction f s'annule en exactement 3 entiers.
3. L'image directe de f ne contient que des nombres entiers qui sont carrés d'un entier.
4. L'image directe de f est exactement l'ensemble des nombres entiers qui sont carrés d'un entier.

Exercice 3 Soient E un ensemble et A, B et C sous-ensembles de E.

1. Montrer l'implication suivante :

$$\left[A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C \right] \Rightarrow B = C \ .$$

2. Montrer l'égalité suivante : $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
3. Soit f une fonction de E dans F. Montrer que $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$.

Exercice 4 On définit la fonction suivante :

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \end{array}$$

1. Déterminer le domaine maximal de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes du domaine maximal de f.
3. Déterminer la dérivée de f.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$ ainsi que de $f(x) = \frac{\pi}{4}$.
6. Montrer que f est injective.
7. Tracer le graphe de f.

Exercice 5 Soit E un ensemble fini à n éléments où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit A un sous-ensemble non vide de E de cardinal a. Montrer que le nombre de sous-ensembles B de E tels que $\mathrm{Card}(A \cap B) = 1$ est $a2^{n-a}$.
2. En faisant une somme paramétrée par a, déduire du premier point de l'exercice que le cardinal de l'ensemble des paires $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ telles que $\mathrm{Card}(A \cap B) = 1$ est $n3^{n-1}$.