Mathématiques - CT Analyse

Corrigé

Exercice 1 : Applications Soit $f : X \to Y$ une application

1. Définir une fonction réciproque à gauche, une fonction réciproque à droite, et une fonction réciproque (bilatère) pour f.
2. Pour $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ définir l'image directe de A et l'image réciproque de B sous f.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes parties A et B de X on a $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.
4. Soient $g : Y \to Z$ et $h : Z \to U$ deux autres applications. Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h sont bijectives.

Solution :

1. Une fonction $g : Y \to X$ est une fonction réciproque à gauche si $g \circ f = \mathrm{id}_X$, une fonction réciproque à droite si $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, et une fonction réciproque (bilatère) si $g \circ f = \mathrm{id}_X$ et $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
2. L'image directe $f[A] = \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y$ et l'image réciproque $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$.
3. Supposons f injective. On a toujours
$$f[A \cap B] = \{f(x) : x \in A \cap B\} \subseteq \{f(x) : x \in A\} = f[A]\,;$$
de même $f[A \cap B] \subseteq f[B]$, et donc $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap [B]$. Soit donc $y \in f[A] \cap f[B]$. Alors il y a $a \in A$ avec $f(a) = y$ et $b \in B$ avec $f(b) = y$. Par injectivité de f on a $a = b \in A \cap B$, et $y \in f[A \cap B]$. Ainsi $f[A] \cap f[B] \subseteq f[A \cap B]$ et on a égalité.
Réciproquement, supposons f non-injective. Il y a donc $a \neq b$ dans X avec $f(a) = f(b) =: y$. On pose $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Alors $f[A] = \{f(a)\} = \{y\} = \{f(b)\} = f[B]$, et $f[A] \cap f[B] = \{y\}$. Or, $A \cap B = \emptyset$, et $f[A \cap B] = \emptyset \neq \{y\}$.
4. La composition de fonctions bijectives est bijective, donc si f, g et h sont bijectives, $g \circ f$ et $h \circ g$ aussi.
Réciproquement, supposons $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives. Alors $g \circ f$ est surjective, et g aussi. De plus, $h \circ g$ est injective, et g aussi. Ainsi g est bijective, et admet un fonction réciproque bilatère g^{-1}, qui est bijective. Ainsi $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ et $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ sont bijectives comme composition de fonctions bijectives.

Exercice 2 : Suites On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{9}\,(x^3 + 6x + 1)$, et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que f a un unique point fixe α dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $f[\mathbb{R}_+] \subseteq \mathbb{R}_+$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est monotone, et déterminer le sens de la monotonie.
3. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq u_n < 1/2$ pour tout $n > 0$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers α.

Solution :

1. $x \in \mathbb{R}$ est point fixe si $x = f(x) = \frac{1}{9}\big(x^3 + 6x + 1\big)$, donc $9x = x^3 + 6x + 1$, c'est-à-dire $g(x) := x^3 - 3x + 1 = 0$. On a $g(-2) = -8 + 6 + 1 = -1 < 0$, $g(0) = 1 > 0$, $g(1/2) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{8} < 0$ et $g(2) = 8-6+1 = 3 > 0$. Puisque g est continue, d'après le TVI il y a des zéros dans l'intervalle $]-2, 0[$, $[0, 1/2]$ et $]1/2, 2[$. Puisque g est de degré 3 et a au plus trois zéros, les zéros dans ces intervalles sont uniques. Il y a notamment un unique zéro $\alpha \in [0, 1/2]$, qui est l'unique point fixe de f dans $[0, 1/2]$.

2. La fonction dérivée de f est $f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+2x)$, et $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = \frac{1}{9} > 0$; puisque f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ on a $f(x) \geq f(0) > 0$ pour $x \geq 0$, et $f[\mathbb{R}_+] \subseteq \mathbb{R}_+$. On a $u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{1}{9} > u_0$.
   On montre par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation. On a bien $u_1 = \frac{1}{9} > 0 = u_0$.
   Hypothèse. On suppose $u_{n+1} \geq u_n$.
   Hérédité. On a $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$, par hypothèse et puisque f est croissante.
   Ceci montre que $(u_n)_n$ est croissante.
3. On a $f(1/2) = \frac{1}{9\cdot 8}(1+6\cdot 4+8) = \frac{33}{72} < \frac{36}{72} = \frac{1}{2}$.
   On montre par récurrence que $0 \leq u_n < 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Initialisation. $0 = u_0 < 1/2$.
   Hypothèse. $0 \leq u_n < 1/2$.
   Hérédité. Puisque $(u_n)_n$ est croissante, on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$. De plus, puisque f est croissante, $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(1/2) < 1/2$.
   Ainsi $0 \leq u_n < 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Il en suit que $(u_n)_n$ est croissante et majoré par $1/2$. Donc $(u_n)_n$ converge vers un réel $\ell \leq 1/2$, et

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to\infty} u_n) = f(\ell)$$

   par continuité de f. Donc ℓ est un point fixe de f dans $[0, 1/2]$, et $\ell = \alpha$.

Exercice 3 : Fonctions réelles Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire convexe. Déterminer f.

Solution : Puisque f est impaire on a $f(-x) = -f(x)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f(0) = 0$; comme f est convexe on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)0) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(0)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. Ainsi $f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$. En particulier

$$-f(\lambda x) = f(\lambda(-x)) \leq \lambda f(-x) = -f(x),$$

ce qui donne $f(\lambda x) \geq \lambda f(x)$ et on a égalité. En particulier pour $0 \leq y \leq 1$ on pose $\lambda = y$ et $x = 1$, ce qui donne $f(y) = y\, f(1)$; pour $y \geq 1$ on pose $\lambda = 1/y$ et $x = y$, ce qui donne $f(1) = f(y/y) = (1/y)\, f(y)$, soit $f(y) = y\, f(1)$. Pour $y < 0$ on a

$$f(y) = -f(-y) = -(-y)\, f(1) = y\, f(1).$$

Ainsi $f(x) = x\, f(1)$ est f est linéaire.

Exercice 4 : Fonctions réelles continues et dérivables Pour un entier $k > 0$ on considère la fonction réelle f définie par

$$f(x) = x^k \ln(x^2).$$

1. Donner le domaine maximal de f.
2. Donner la fonction dérivée de f.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en une fonction $\bar{f}$ continue sur $\mathbb{R}$.
4. Etudier l'existence de $\bar{f}'(0)$ en fonction de k.
5. On cherche à montrer que pour $i \leq k$ la dérivée i-ième de f s'écrit

$$(\dagger) \qquad f^{(i)}(x) = \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i} \ln(x^2) + P_i(x),$$

   où P_i est un polynôme réel.
   (a) Trouver P_0 et P_1.
   (b) Donner une relation de récurrence pour P_i pour $i \leq k$ et valider la formule $(\dagger)$.
   (c) En déduire que que $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})$.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto x^k$ est défini sur $\mathbb{R}$, et ln est défini sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $x^2 > 0$ pour $x \neq 0$, le domaine maximal est dom $f = \mathbb{R}^*$.
2. On a $f'(x) = kx^{k-1} \ln x^2 + x^k \frac{2x}{x^2} = kx^{k-1} \ln x^2 + 2x^{k-1}$.
3. D'après les croissances comparées et avec $y = x^2$ on a

$$\lim_{x \to 0} x^k \ln x^2 = \lim_{y \to 0^+} y^{k/2} \ln y = 0.$$

D'après le théorème de la prolongation par continuité, la fonction $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\bar{f}(x) = f(x)$ si $x \neq 0$, et $\bar{f}(0) = 0$, est continue.

4. D'après les croissances comparées on a

$$\bar{f}'(0) = \lim_{x \to 0} \Delta_{\bar{f},0}(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} x^{k-1} \ln x^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq 2 \\ -\infty & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

Donc $\bar{f}$ est dérivable en 0 si $k > 1$.

5. $f^{(0)} = f$, donc $P_0(x) = 0$. De plus, $f'(x) = kx^{k-1} \ln x^2 + 2x^{k-1} = \frac{k!}{(k-1)!} \ln x^2 + 2x^{k-1}$, donc $P_1(x) = 2x^{k-1}$.
6.

$$\begin{aligned} f^{(i+1)}(x) &= \big(f^{(i)}\big)' = \Big(\frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i} \ln(x^2) + P_i(x)\Big)' = \frac{k!}{(k-i-1)!} x^{k-i-1} \ln(x^2) + \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i} \frac{2x}{x^2} + P_i'(x) \\ &= \frac{k!}{(k-i-1)!} x^{k-i-1} \ln(x^2) + 2 \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i-1} + P_i'(x). \end{aligned}$$

Ainsi $P_{i+1}(x) = 2\frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i-1} + P_i'(x)$. On note que P_{i+1} est un polynôme tant que $i < k$.

7. Pour $i < k$ on a d'après les croissances comparées

$$\lim_{x \to 0} f^{(i)}(x) = \lim_{x \to 0} \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i} \ln(x^2) + P_i(x) = 0 + P_i(0) = P_i(0).$$

D'après le théorème de la prolongation dérivable, $\bar{f}^{(i)}$ existe et est continue en zéro. Ainsi $\bar{f} \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})$.