Mathématiques - CT Analyse

Exercice 1 : Applications Soit $f : X \to Y$ une application

1. Définir une fonction réciproque à gauche, une fonction réciproque à droite, et une fonction réciproque (bilatère) pour f.
2. Pour $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ définir l'image directe de A et l'image réciproque de B sous f.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes parties A et B de X on a $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.
4. Soient $g : Y \to Z$ et $h : Z \to U$ deux autres applications. Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h sont bijectives.

Exercice 2 : Suites On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{9}(x^3 + 6x + 1)$, et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que f a un unique point fixe α dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $f[\mathbb{R}_+] \subseteq \mathbb{R}_+$. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est monotone, et déterminer le sens de la monotonie.
3. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \le u_n < 1/2$ pour tout $n > 0$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge vers α.

Exercice 3 : Fonctions réelles Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire convexe. Déterminer f.

Exercice 4 : Fonctions réelles continues et dérivables Pour un entier $k > 0$ on considère la fonction réelle f définie par
$$f(x) = x^k \ln(x^2).$$

1. Donner le domaine maximal de f.
2. Donner la fonction dérivée de f.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en une fonction $\bar{f}$ continue sur $\mathbb{R}$.
4. Etudier l'existence de $\bar{f}'(0)$ en fonction de k.
5. On cherche à montrer que pour $i \le k$ la dérivée i-ième de f s'écrit
$$(\dagger) \qquad f^{(i)}(x) = \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i} \ln(x^2) + P_i(x),$$
où P_i est un polynôme réel.
   (a) Trouver P_0 et P_1.
   (b) Donner une relation de récurrence pour P_i pour $i \le k$ et valider la formule $(\dagger)$.
   (c) En déduire que que $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})$.