Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023

Cursus prépa - Première année

Mathématiques - CT Algèbre

Exercice 1 : Logique

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R) \quad \text{et} \quad (P \wedge (Q \Rightarrow R)) \vee (\neg P \wedge (R \Rightarrow Q)).$$

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Exprimer en langage formel que f est lipschitzienne. Donner la négation de cet énoncé.
3. Pour deux ensembles X et Y on pose $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$. Montrer que pour deux ensembles A et B on a

$$(A \triangle B) \triangle B = A.$$

Exercice 2 : Les complexes

1. Réssoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 - (12+i)z + 37 + 9i = 0.$$

2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application complexe $z \mapsto 1/\bar{z}$, et L la droite $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im} z = 1\}$. Identifier $f^{-1}[L]$.

Exercice 3 : Arithmétique

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation diophantienne $1665x + 1035y = 45$.
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et entier $k \geq 1$ on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = \left(2^{2^n} - 1\right) \prod_{i=0}^{k-1} \left(2^{2^{n+i}} + 1\right).$$

   (b) On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que F_n et F_m sont premiers entre eux pour $m \neq n$.

   (c) En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 4 : Polynômes

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.
   (a) Définir une racine d'ordre n de P.
   (b) Définir le polynôme dérivé de P.
2. On cherche à montrer la formule de Taylor pour les polynômes, c'est-à-dire pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq \deg(P)$ on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X-a)^k}{k!} P^{(k)}(a).$$

   (a) Montrer que la formule est vrai si $P(X) = X^d$.
   (b) Montrer que si la formule est vrai pour P et Q, alors elle est vraie pour $bP + cQ$, où $b, c \in \mathbb{R}$.
   (c) Conclure.
3. En déduire que a est une racine d'ordre ℓ si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(\ell-1)}(a) = 0$ et $P^{(\ell)}(a) \neq 0$.