Feuille d'exercices n° 10
Continuité et dérivabilité

Exercice 1. Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, $x_0 \in]a, b[$ et $f :]a, b[\to \mathbf{R}$. On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0) > 0$. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I inclus dans $]a, b[$ et contenant x_0, tel que $\forall x \in I$, $f(x) > 0$.

Solution : f est continue en x_0 : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$|x_0 - y| < \delta \implies |f(x_0) - f(y)| < \epsilon.$$

On choisit $\epsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ alors il existe un $\delta > 0$ tel que $\forall y \in]a, b[, |x_0 - y| < \delta \implies |f(x_0) - f(y)| < \frac{f(x_0)}{2}$
$\implies \forall y \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x_0) - f(y) < \frac{f(x_0)}{2}$
$\implies \forall y \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, 0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(y)$
Donc, en prenant l'ouvert $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap]a, b[$ on a bien : $f(y) > 0\ \forall y \in I$.

Exercice 2. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$
2. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.
3. $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x\, E\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$, où E est la fonction «partie entière».
4. $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Solution :
1. f est continue sur $[0, 1[$ et à gauche de 1 par continuité de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbf{R}$.
Ensuite, f est continue sur $]1, 2]$ et à droite de 1 par continuité de $x \mapsto 2x - 1$ donc il suffit de tester la limite à droite en 1 :

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x - 1 = 1 = f(1).$$

Par conséquent, f est continue sur $[0, 2]$.

2.f est continue sur $\mathbf{R}^*$ par continuité de la fonction $x \mapsto x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, il faut donc tester la continuité en 0 .
Sur $\mathbf{R}^{+*}, f(x) = x + \frac{|x|}{x} = x + 1$, donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(1)$.
Sur $\mathbf{R}^{-*}, f(x) = x + \frac{|x|}{x} = x - 1$, donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1 \neq f(1)$. Conclusion : f est discontinue en 0.

3. Si $x \in]1, +\infty[$ on a $\frac{1}{x} \in]0, 1[$ et donc $f(x) = xE(\frac{1}{x}) = 0$ alors, f est continue sur $]1, +\infty[$.
Si mainteanant $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ on a $\frac{1}{x} \in [n; n+1[$, et donc $f(x) = nx$. f est alors continue sur les intervalles de la forme $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ il nous reste maintenant qu'à tester la continuité aux points de la forme $1/n$ avec

$n \in \mathbf{N}$ et en 0.
On a $\lim\limits_{x \to (1/n)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (1/n)^+} x(n-1) = \lim\limits_{x \to (1/n)^+} \frac{n-1}{n}$ et $\lim\limits_{x \to (1/n)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (1/n)^-} xn = 1$. Donc f n'est pas continue en $(1/n), \forall n \in \mathbf{N}$.
On a finalement, $\forall x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $\frac{n}{n+1} < f(x) \leq 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(1)$ ainsi f est continue à droite en 0.
4. f est continue sur $[-2, 2] \setminus \{0\}$ par continuité de la fonction $x \mapsto x^2 sin(\frac{\pi}{x})$
Maintenant il suffit de tester la continuité en 0.
On a $|f(x)| \leq x^2$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Exercice 3.

1. Montrer que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

   alors f est surjective.
2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Montrer que P admet une racine réelle.
3. Donner un exemple de polynôme à coefficients réels, de degré pair, n'admettant pas de racine réelle.

Solutions :
1. f est surjective $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}\ f(x) = y$.
Soit maintenant $y \in \mathbf{R}$, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors il est existe $z \in \mathbf{R}$ tel que $f(z) \geq y$, de même il existe $p \in \mathbf{R}$ tel que $f(p) \leq y$. Par le théorème des valeurs intermédiares il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = y$.
2. Soit P un polynôme de degré impair, quitte à considérer $-P$, on peut supposer que le coefficient dominant est strictement positive, dans ce cas on a :

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$$

Donc P est surjective (d'après la question.1), en particulier $P(x) = 0$ admet ou moins une solution dans $\mathbf{R}$.
3. $x \mapsto x^2 + 1$ ou tout simplement $x \mapsto c$, avec c une constante $\neq 0$.

Exercice 4. Montrer qu'il existe $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ tel que

$$\tan(x) + \frac{x}{3} = 0.$$

Solutions :

On considère la fonction f définie sur $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ dans $\mathbf{R}$ par : $f(x) = tan(x) + \frac{x}{3}$.
On a $f(\pi) = tan(\pi) + \frac{\pi}{3} = 0 + \frac{\pi}{3} > 0$, et $f(\frac{3\pi}{4}) = tan(\frac{3\pi}{4}) + \frac{\frac{3\pi}{4}}{3} = \frac{sin(\frac{3\pi}{4})}{cos(\frac{3\pi}{4})} + \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\pi}{4} = -1 + \frac{\pi}{4} < 0$.
Par le théorème des valeus intermédiares, il existe $x \in [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ tel que : $f(x) = 0$.

Exercice 5.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une application continue, telle que $f([0,1]) \subset [0,1]$. Montrer que f possède un point fixe.
2. Soit $g : [0,1] \to [0,1]$ une application. On suppose que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$ tels que $x \neq y$, on a $|g(x) - g(y)| < |x - y|$. Montrer que g admet un unique point fixe.

Solutions :
1. On considère la fonction h définie sur $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ par : $h(x) = f(x) - x$.
On a $h(0) = f(0) - 0 \geq 0$ et $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$ alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $h(x) = 0$ et par conséquent, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.
2. On remarque que $|g(x) - g(y)| \leq |x - y| \, \forall x \neq y$. Donc, la fonction g est 1-Lipschitzienne, ce qui implique que g est continue.
Par la question .1, g admet un point fixe, ensuite on suppose qu'elle en admette plus qu'un, soient x et y deux points fixes différents de g, on a :

$$|x - y| = |g(x) - g(y)| < |x - y|.$$

Contradiction, du coup g admet un et un seul point fixe.

Exercice 6.

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. Calculer
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x\left(\sin^8(x) + \cos^{14}(x)\right)}.$$

Solutions :
1.Comme la fonction f est périodique (on suppose que sa période est L),il suffit de montrer qu'elle est bornée sur $[0, L]$ pour en déduire qu'elle est bornée sur tout $\mathbf{R}$.
Pour cela, on considère la fonction h définie sur $[0, L]$ par $x \mapsto f(x)$. h est continue et définie sur un segment, donc par le théorème du maximum h atteint son maximum, ensuite, comme max$-h$=-min$h$, en appliquant le théorème du maximum à $-h$ on trouve que le minimum de h est aussi atteint, donc h est bornée ce qui implique que f est bornée sur $[0, L]$ puir sur $\mathbf{R}$ tout entier.

2. Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $x :\mapsto sin^8(x) + cos^{14}(x)$, g est continue et périodique, par la question 1. elle est bornée donc minorée, montrons que ce monorant $\neq 0$. Supposons qu'il existe $y \in \mathbf{R}$ tel que $g(y) = 0$, cela implique : $sin(y) = 0$ et $cos(y) = 0$, ce qui n'est pas possible car $sin^2(y) + cos^2(y) = 1, \forall y \in \mathbf{R}$.
Par conséquent, il existe $m > 0$ tel que $g(x) \geq m, \forall x \in \mathbf{R}$.

$$0 \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x\left(\sin^8(x) + \cos^{14}(x)\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{xg(x)} \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{xm} = 0.$$

Exercice 7. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.

Solutions :

f n'est pas uniformément continue $\Leftrightarrow \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists (x,y) \in \mathbf{R}$ on a : $|x-y| \leq \epsilon \implies |f(x)-f(y)| > \delta$.
Ici, $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$,
On choisit $\epsilon = 1$ et pour tout δ on prend $x = \delta$ et $y = \delta + \epsilon$, on a bien $|x-y| \leq \epsilon = 1$. et $|f(x) - f(y)| = |x-y||x+y| = |2\delta + 1| > \delta$. D'où, f n'est pas uniformément continue.

__Exercice 8.__ Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues qui vérifient la condition

$$(*) \ : \qquad \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x)\, f(y)\,.$$

Soit f vérifiant $(*)$.

1. Montrer que : $\forall n \geq 2$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$.
2. Quelles sont les valeurs possibles pour $f(0)$?
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Que peut-on dire de f ?
   On suppose désormais que f ne s'annule pas.
4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \alpha^n$.
5. Montrer que : $\forall k \in \mathbf{Z}$, $f(k) = \alpha^k$.
6. Montrer que : $\forall r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = \alpha^r$.
7. Conclure.

Solutions :
1. On procède par récurrence, soit $(P_n) : \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$.
Initialisation : pour $n = 2$, d'après (*), $\forall (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
Hérédité : On suppose que (P_n) est vraie et on démontre que (P_{n+1}) est vraie :
Soit $(x_1, .., x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$, on :

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + ... + x_{n+1}) =& f((x_1 + x_2 + ... + x_n) + x_{n+1}) \\ &= f(x_1 + x_2 + ... + x_n) + f(x_{n+1}) \quad par(*) \\ &= f(x_1)f(x_2)...f(x_n)f(x_{n+1}) \quad par(P_n). \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall n \geq 2$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$. 2. D'après (*), on a $f(0+0) = f(0) = f(0)f(0) = f(0)^2$, $\implies f(0)\ \{0,1\}$.
3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, soit $x \in \mathbf{R}$, d'après (*) on a : $f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x-x_0)f(x_0) = 0$ donc $f(x) = 0$, par conséquent f est nulle sur tout $\mathbf{R}$.
4. On prenant $x_1 = \cdots = x_n = 1$ on a $f(n) = f(1)^n$ on pose $\alpha = f(1)$, comme f ne s'annule pas on a $f(0) = 1$, par la contraposé du TVI $f(1) = \alpha > 0$.
5. On a $f(-1)f(1) = f(-1+1) = f(0) = 1$, $\implies f(-1) = f(1)^{-1} = \alpha^{-1}$, on prenant $x_1 = \cdots = x_k = -1$ on a : $f(-k) = f(-1)^k = \alpha^{-k}$ donc $\forall k \in \mathbf{Z}, f(k) = \alpha^k$.
6. Soient $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\alpha^p = f(p) = f(q(\frac{p}{q})) = f(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + ...\frac{p}{q}) = f(\frac{p}{q})^q, \implies f(\frac{p}{q}) = \alpha^{\frac{p}{q}}.$$

Donc, $\forall r \in \mathbf{Q},\ f(r) = \alpha^r$.
7. Soit $x \in \mathbf{R}$, par densité de $\mathbf{Q}$ on sait qu'il existe une suite $r_i \in \mathbf{Q}$ tel que $\lim_{i\to+\infty} r_i = x$, on a alors $f(x) = \lim_{i\to+\infty} f(r_i) = \lim_{i\to+\infty} \alpha^{r_i} \lim_{i\to+\infty} exp(r_i\alpha) = exp(x\alpha) = \alpha^x$.
Réciproquement, si $f(x) = \alpha^x, \forall x \in \mathbf{R}$ et $\alpha > 0$ f vérifie bien (*).

Exercice 9. Soit $a \in \mathbf{Z}$. On définit $f : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R},\ x \longmapsto x^a \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. À quelle condition sur a la fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Lorsqu'il existe, à quelle condition ce prolongement est-il dérivable en 0 ?
3. Dans ce cas, la dérivée de f est-elle continue en 0 ?

Solutions :
1. f est prolongeable par continuité si $\lim_{x\to0} f(x)$ existe.
Si $a \geq 1$ alors on $|f(x)| \leq x \xrightarrow[x\to0]{} 0$. donc f est prolongeable pour en 0 si $a \geq 1$, et $f(0) = 0$.
Si $a \leq 0$, en testant la fonction $f(x)$ sur les valeurs $\frac{1}{2n\pi}$ et $\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ on s'aperçoit que f n'est pas prolongeable par contuinité en 0 quand $a \leq 0$.
2. Ce prolongement est dérivable lorsque $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ admet une limite.
On a : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^a cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x^{a-1}cos\left(\frac{1}{x}\right)$. donc f est dérivable $\Leftrightarrow, a \geq 2.$, la dérivée de f en 0 serait égale à 0 dans ce cas.
3. Supposons $a \geq 2$, on a : $f'(x) = ax^{a-1}cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^{a-2}sin\left(\frac{1}{x}\right)$, on sait que $\lim_{x\to} ax^{a-1}cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
D'autre part, $x^{a-2}sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet une limite que lorsque $a \geq 3$ cette limite $= 0$.Par conséquent f' est continue en 0 si et seulement si $a \geq 3$.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \frac{x\ln(x)}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $[0, 1]$, et dérivable sur $]0, 1[$.
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? En 1 ?
3. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tels que $f'(c) = 0$.

Solutions :
1. On a : $\lim_{x\to0} xln(x) = 0$ alors : $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, comme $\lim_{x\to1} \frac{ln(x)}{1-x} = -1$ alors : $\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} x + \frac{xln(x)}{1-x} = 0$.Donc f est contine sur $[0, 1]$, ensuite, f est dérivable $]0, 1[$ par la dérivabilité de $x \mapsto x + \frac{xln(x)}{1-x}$ sur $]0, 1[$.
2. On a $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{x+\frac{xln(x)}{1-x}}{x} = \lim_{x\to0^+} 1 + \frac{ln(x)}{1-x} = -\infty$ alors f n'est pas dérivable en 0. Pour calculer

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x + \frac{x\ln(x)}{1-x}}{x - 1} = \lim_{x\to1^-} \frac{x(x-1) - x\ln(x)}{(x-1)^2}$$

il suffit d'appliquer la règle de l'Hopital deux fois, ce qui donne $\frac{1}{2}$. Donc, f est dérivable en 1.
3. On a f contniue sur $[0, 1]$, dérivable sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1)$, alors par le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, 1[$ tel que : $f'(c) = f(1) - f(0) = 0$.

Exercice 11. Soient un entier $n \geq 1$ et une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, n fois dérivable, et telle que $f^{(n)}$ est continue. On suppose que f s'annule en $n+1$ points distincts. Montrer que f' s'annule au moins n fois, puis que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Solutions :

Soit (P_n) : Toute fonction n fois dérivable tel que $f^{(n)}$ est continue, si f s'annule en $n+1$ points distincts alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.
Initialisation : Soit f une fonction 1 fois dérivable tel que $f' = f^{(1)}$ est continue, si f s'annule 2 fois en deux points distincts, supposons : $f(a) = f(b) = 0, a \neq b$ alors par le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(1)}(c) = 0$. Donc (P_1) est vérifiée.
Hérédité : supposons que (P_n) est vraie et montrons (P_{n+1}), soit f une fonction $n+1$ fois dérivable tel que $f^{(n+1)}$ est continue, si f s'annule en $n+2$ points distincts, alors si on note ces points par $a_0, a_1, ..., a_{n+2}$ on a : sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tels que $f'(b_i) = 0$ par le théorème de Rolle, la fonction f' est n fois dérivable et $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ est continue, f' s'annule en $n+1$ points distincts (les b_i) donc par (P_n), $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois, d'où (P_{n+1}) est vraie.
Conclusion : Toute fonction n fois dérivable tel que $f^{(n)}$ est continue, f s'annule en $n+1$ points distincts alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 12. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $t > 0$

$$\arctan t > \frac{t}{1+t^2}.$$

Solutions :

On sait que $arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}, \forall t \in \mathbf{R}$, par le TAF, il existe $z \in]0, t[$ tel que l'on a

$$arctan(t) = arctan(t) - actan(0) = t(arctan'(z)) = \frac{t}{1+z^2} > \frac{t}{1+t^2}.$$

Car $\frac{1}{1+z^2} > \frac{1}{1+t^2}$.

Exercice 13. À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x\to\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right).$$

Solutions :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$, on a : $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$.
On remarque que $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = f(x+1) - f(x)$, donc par le théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in]x, x+1[$ tel que $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = f'(c(x))$, par conséquent :

$$\lim_{x\to\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} f'(c(x)) = 1.$$

Exercice 14. Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$.

1. On suppose que pour $0 \leq x \leq 1$, on a $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est de signe constant sur $[0, 1]$.
2. On suppose de plus que f' est continue sur $[0, 1]$, et que $f'(x) > 0$ pour $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que pour $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq mx$.

Solutions :

1. On suppose que f n'est pas de signe constant sur $[0,1]$ alors $\exists x, y \in]0,1]$ tel que $f(x) < 0$ et $f(y) > 0$, d'après le TVI, il existe $z \in [x,y], f(z) = 0$, puis en apliquant le TAF : $0 = fz) - f(0) = zf'(t)$ pour un certain $t \in [0,1]$, ce qui contredit le fait que $f'(x) \neq 0, \forall x \in [0,1]$.

2. f' est une fonction continue définie sur un segment, d'après le théorème du maximum appliqué à $-f'$, $\max(-f')$ et atteint, comme $\max(-f')$=-$\min(f')$ alors $\min(f')$ est aussi atteint, donc il existe $z \in [0,1]$ tel que $0 < f'(z) \leq f'(x), \forall x \in [0,1]$.
Le TAF $\implies$ $f(x) - f(0) = f(x) = xf'(l)$ pour un certain $l \in [0,1]$, d'après ce qui précède, $f(x) \geq f'(z)x$.
Il suffit alors de prendre $m = f'(z)$ pour répondre à la question.

Exercice 15. Soit $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ une fonction continue telle que $f(x)/x$ a une limite réelle $\ell \in [0,1[$ quand x tend vers ∞. Montrer que f a un point fixe.

Solutions :

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$, donc il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \geq a$, $\frac{f(x)}{x} \leq 1$, donc $\forall x \geq a, f(x) \leq x$.
On considère la fonction $g : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*, x \mapsto f(x) - x$, on a : $g(0) \geq 0$ car l'image de f est dans $[0,+\infty[$, ensuite, $g(a) \leq a$ car $f(A) \leq 0$. Par le TVI, il existe $c \in [0,A]$ tel que $g(c) = 0$ et donc $f(c) = c$.

Exercice 16. Soit f continue sur $\mathbf{R}_+$ telle que, pour tout réel positif x, on ait $f(x^2) = f(x)$. Montrer que f est constante.

Solutions :

On démontre par récurrence que $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}}), \forall n \in \mathbf{N}$.
Initialisation : pour $n = 1$ on a bien $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^1}})$ (car $f(x) = f(x^2)$).
Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour $n \in \mathbf{N}$ et démontrons qu'elle l'est pour $n+1$, on a :

$$f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = f((x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2^n}}) = f(x^{\frac{1}{2^{n+1}}}).$$

Conclusion : $f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}}), \forall n \in \mathbf{N}$.
Maintenant, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2^n}} = 1, \forall x \in \mathbf{R}^{*,+}$, alors on a :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1).$$

Par la continuité de f, on a alors $f(x) = f(1), \forall x \neq 0$. Ensuite , par la continuité de f on a $f(0) = f(1)$. Enfin, f est constante sur $\mathbf{R}^+$.

Exercice 17. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ continue et admettant une limite réelle quand x tend vers ∞. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}_+$.

Solutions :

Supposons que $\lim f(x) = l$, soit $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \geq A, |f(x) - l| \leq \frac{\epsilon}{3}$, comme f st uniformément continue sur $[0,A]$ par le théorème de Heine (car $[0,A]$ est compacte), alors pour ce ϵ, $\exists \delta$ tel que $|x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}$.
Soient maintenant, $x, y \in \mathbf{R}$ tel que $|x,y| \leq \delta$, si $(x,y) \in [0,A]$ on a bien $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon/3 \leq \epsilon$, si

$x, y \geq A$ on a $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-l|+|f(y)-l| \leq \epsilon/3+\epsilon/3 \leq \epsilon$. Finalement, si $x \leq A$ et $y \geq A$ (ou le contraire), on a $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(A)|+|f(A)-l|+|l-f(y)| \leq \epsilon/3+\epsilon/3+\epsilon/3 \leq \epsilon$. Conclusion : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $|x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \epsilon$, par conséquent, f est uniformément continue.

Exercice 18. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue et vérifiant $f(0) = f(1)$.

1. Soit n un entier naturel non nul et soit $a = 1/n$. Montrer que l'équation $f(x+a) = f(x)$ admet au moins une solution.
2. Montrer (en fournissant une fonction précise) que, si a est un réel de $]0,1[$ qui n'est pas de la forme précédente, il est possible que l'équation $f(x+a) = f(x)$ n'ait pas de solution.

Solutions :
1. $\forall n \in \mathbf{N}$ on définit $h : [0, \frac{n-1}{n}] \to \mathbf{R}$ par : $x \mapsto f(x+\frac{1}{n}) - f(x)$, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(\frac{i}{n}) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x+\frac{1}{n}) - f(\frac{i}{n}) \right) = f(1) - f(0) = 0,$$

Donc il existe $i, j \in \{0, 1, ...n-1\}$ différents tels que l'on a : $h(\frac{i}{n}) \leq 0$ et $h(\frac{j}{n}) \geq 0$ par suite, par le TVI il existe $c \in [\frac{i}{n}, \frac{j}{n}]$ (on suppose que $j > i$) tel que $h(c) = f(c+\frac{1}{n}) - f(c) = 0$.
2. Soit $a \in [0,1]$ n'étant pas de la forme $\frac{1}{n}$ pour un certain n dans $\mathbf{N}$. Soit $g(x) = |sin(\frac{x\pi}{a})|$ on sait que $g(x+a) - g(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.
Soit maintenant la fonction $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $x \mapsto g(x) - xg(1)$, on a :

$$P(x+a) - P(x) = g(x+a) - (x+a)g(1) - g(x) + xg(1) = -ag(1) \neq 0.$$

Pour P, il n'existe aucun $x \in [0,1]$ tel que $P(x+a) - P(a) = 0$.
Voici un exemple avec $a = 0.3$ $\big(P(x) = |sin(\frac{x\pi}{a})| - x|sin(\frac{\pi}{a})|.\big)$.

Exercice 19. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbf{R})$ telle que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x) : x \in [a,b]\}$.
Montrer que f est affine.

Solutions :

cas1 : si $\sup\{f'(x) : x \in [a,b]\} = 0$, on a alors $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a,b]$ donc f est décoissante, ainsi et comme $f(a) = f(b)$ on a alors : f est constante donc affine.
cas2 : le cas contraire, on considère la fonction $g(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$, on a dans ce cas

$$\sup\{g'(x) : x \in [a,b]\} = \sup\{f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} : x \in [a,b]\} = 0$$

$g(a) = g(b)(= f(a))$, donc g est constante d'après ce qui précède, par suite f est affine.

Exercice 20. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^*)$ telle que $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 1$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Solutions :

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$ on a : $\exists r \in \mathbf{R}$, $\forall x \geq r$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante à partir d'un certain rang, donc forcément elle admet une limite.
Supposons que la limite de f est finie, notée l
On a alors d'une part $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - f(y) = l - f(y)$ pour un y fixé et $x \geq y$, d'autre part : $\exists c \in [y,x]$ tel que $f(x) - f(y) = (x-y)f'(c)$, on a :
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-y}{x} = 1$, $\frac{x}{c} \geq 1$ et choisissons y tel que $\forall w \geq y$ on a $wf'(w) \geq \frac{1}{2}$, en combiannt ce qu'on a :

$$l - f(y) = \lim f(x) - f(y) = \lim (x-y)f'(c) = \lim \frac{x-y}{x}\frac{x}{c}cf'(c) \geq (\lim \frac{x-y}{x})(1)(\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2}$$

Ce qui donne $(l - f(y) \geq \frac{1}{2})$, $\forall y$ à partir d'un certain rang, ce qui implique en passant à la limite en y que $0 \geq \frac{1}{2}$
Donc la limite de f ne peut être finie, en conséquence : $\lim f = +\infty$.

Exercice 21. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ vérifiant pour tout x réel, $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$. En remarquant que $f(\frac{x}{2}+3) = \frac{f(x)}{2} + 3$, montrer que f' est constante, puis déterminer f.

Solutions :
On a :

$$\frac{f(x)}{2} + 3 = f \circ f\left(f(x)\right) = f \circ f \circ f(x) = f\left(f \circ f(x)\right) = f\left(\frac{x}{2}+3\right)$$

En dérivant cette relation on obtient : $(\frac{1}{2})f'(\frac{x}{2}+3) = (\frac{1}{2})f'(x) \implies f'(\frac{x}{2}+3) = f'(x)$.
On peut montrer par récurrence que : $\forall x \in R, f'(x) = f'\left(\frac{x+6(2^n-1)}{2^n}\right)$, on a alors , $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'(\frac{x+6(2^n-1)}{2^n}) = f'(6).$$

Ainsi, f' est constante sur tout $\mathbf{R}$, donc f est de la forme $x \mapsto ax+b$,
En remplaçant dans l'équation : $f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$, on trouve :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad b = \frac{3\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

Exercice 22. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ vérifiant $\lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. (Indication : Considérer $g(x) = e^x f(x)$.)

Solutions :

Posons $g(x) = e^x f(x)$ on a : $g'(x) = e^x(f(x)+f'(x))$
Fixons $c > 0$, alors il existe N, $\forall x \geq N, -c \leq f(x)+f'(x) \leq c$ donc $-ce^x \leq g'(x) \leq ce^x$.
Cela implique que les fonctions $x \mapsto ce^x - g(x)$ et $x \mapsto ce^x + g(x)$ont des dérivées positives pour $x \geq N$.
Donc à partir de N, ces deux fonctions sont croisssantes, par suite il existe $d \in \mathbf{R}$ tel que $ce^x - g(x) \geq d$ et $ce^x + g(x) \geq d$ $\forall x \geq N$.
Ainsi :

$$-c + de^{-x} < e^{-x}g(x) = f(x) < c - de^{-x}$$

ce qui implique que $\forall x \geq N$, $|f(x)| \leq c$. comme cela est vrai pour tout c on a donc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, par conséquent $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ aussi.