Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2022-2023

Fondamentaux des mathématiques I

Feuille d'exercices n° 2

RÉCURRENCE, SOMMES ET PRODUITS

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Solution : On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(P_n): \qquad u_n = 2n + \frac{1}{3^n}.$$

— Initialisation. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 = 2 \times 0 + \frac{1}{3^0}$. (P_0) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). Par la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) = \frac{1}{3}(2n + 3^{-n} + 4n + 6) = 2(n+1) + \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture par récurrence.

Solution : On voit que

$$u_0 = 1,\ u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{4}}....$$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(P_n): \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

— Initialisation. Pour $n = 0$, c'est évident que (P_0) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). Par la relation de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{\frac{1}{n+1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_{n+1} = 4u_n + 9.$$

1. Montrer qu'il existe λ dans $\mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \lambda)_{n\in N}$ soit une suite géometrique.
2. En déduire une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve : On voit que

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \lambda = 4u_n + 9 - \lambda = 4(u_n - \lambda) + 9 + 3\lambda = 4v_n + (9 + 3\lambda).$$

Pour que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique, il faut que $9+3\lambda = 0$. Autrement dit, si on prend $\lambda = -3$, alors $(v_n = u_n + 3)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
Pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$v_n = 4^n v_0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

avec $v_0 = u_0 + 3 = 4$. On en déduit que

$$u_n = v_n - 3 = 4^{n+1} - 3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 4. Calculer le terme général des suites définies par récurrences suivantes :

1. $u_0 = 2$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n^3$;
2. $v_0 = 3$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = 2v_n^3$.

Solution :

1. Par calcul, on voit que
$$u_0 = 2,\ u_1 = 2^3,\ u_2 = 2^{3^2},\ u_3 = 2^{3^3}.$$
On va vérifier par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(P_n) : \qquad u_n = 2^{3^n}.$$
— Initialisation. Pour $n = 0$, c'est évident que (P_0) est vrai.
— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). Par la relation de récurrence,
$$u_{n+1} = u_n^3 = (2^{3^n})^3 = 2^{3^n\times 3} = 2^{3^{n+1}}.$$
Donc, (P_{n+1}) est vrai.
— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{3^n}$.
2. On voit que $v_n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $w_n = \ln(v_n)$ et obtient que
$$w_{n+1} = 3w_n + \ln(2), \forall n \in \mathbb{N},$$
avec $w_0 = \ln(3)$. Par la méthode de l'Ex 3, on voit que $(w_n + \frac{1}{2}\ln(2))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Donc, on a
$$w_n + \frac{1}{2}\ln(2) = 3^n(w_0 + \frac{1}{2}\ln(2)) = 3^n \ln(3\sqrt{2}).$$
Par conséquent,
$$v_n = e^{w_n} = e^{w_n + \frac{1}{2}\ln(2)}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{2})^{3^n}}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{3^n-1}{2}}3^{3^n}.$$

Exercice 5. Montrer par récurrence les assertions suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est un multiple de 11.

Preuve :

1. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P_n) : \qquad 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ est un multiple de 7.}$$

— Initialisation. Pour $n = 0$, $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7$. C'est évident que (P_0) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). En effet,

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} = 9 \times \underbrace{(3^{2n+1} + 2^{n+2})}_{\text{multiple de 7}} - 7 \times 2^{n+2},$$

qui est un multiple de 7. Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

2. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(P_n) : \qquad 3^{2n} + 2^{6n-5} \text{ est un multiple de 11.}$$

— Initialisation. Pour $n = 1$, $3^{2n} + 2^{6n-5} = 11$. C'est évident que (P_1) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). En effet,

$$3^{2(n+1)} + 2^{6(n+1)-5} = 9 \times 3^{2n} + 64 \times 2^{6n-5} = 9 \times \underbrace{(3^{2n} + 2^{6n-5})}_{\text{multiple de 11}} + 55 \times 2^{6n-5},$$

qui est un multiple de 11. Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n} + 2^{6n-5}$ est un multiple de 11.

Exercice 6. Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes :

1. $3^4 + 3^5 + 3^6 + ... + 3^{15}$
2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + ... + \frac{10}{1024}$
3. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n}$
4. $2 - 4 + 6 - 8 + ... + 50$

Solution :

1. $3^4 + 3^5 + 3^6 + ... + 3^{15} = \sum_{n=4}^{15} 3^n$.
2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + ... + \frac{10}{1024} = \sum_{n=1}^{10} \frac{n}{2^n}$.
3. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.
4. $2 - 4 + 6 - 8 + ... + 50 = \sum_{n=1}^{25} (-1)^{n-1} \times 2n$.

<u>Exercice 7.</u> Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\forall n \geq 4,\ 2^n \leq n!$ (avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$)

Preuve :

1. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$(P_n) : \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
— Initialisation. Pour $n = 1$, $1 = \frac{1\times(1+1)}{2}$. C'est évident que (P_1) est vrai.
— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). En effet,
$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (\frac{n}{2}+1)(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$
Donc, (P_{n+1}) est vrai.
— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$(P_n) : \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
— Initialisation. Pour $n = 1$, $1 = \frac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}$. C'est évident que (P_1) est vrai.
— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). En effet,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1)(n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$
Donc, (P_{n+1}) est vrai.
— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$(P_n) : \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
— Initialisation. Pour $n = 1$, $1 = \frac{1^2\times 2^2}{4}$. C'est évident que (P_1) est vrai.
— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). En effet,
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (\frac{n^2}{4} + n + 1)(n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.\end{aligned}$$
Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4. On va montrer que pour tout $n \geq 4$,

$$(P_n): \qquad 2^n \leq n!.$$

— Initialisation. Pour $n = 4$, $2^n = 16$ et $n! = 24$. C'est évident que (P_1) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). En effet,

$$2^{n+1} = 2^n \times 2 \leq n! \times (n+1) = (n+1)!$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \geq 4$, $2^n \leq n!$.

Exercice 8. (Formule du binôme de Newton)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!] = [0, n] \cap \mathbb{N}$, on note (avec la convention $0! = 1$) :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Calculer $\binom{0}{0}$, $\binom{n}{n}$ et $\binom{n}{0}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution : On a

$$\binom{0}{0} = 1, \ \binom{n}{n} = 1, \ \binom{n}{0} = 1.$$

2. Formule du binôme de Newton.

(a) Montrer que pour tous entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Preuve : Par définition, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}.$$

(b) **Triangle de Pascal.** Montrer que, pour tous entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$, on a

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Preuve : Par calcul direct, pour $1 \leq p \leq n-1$, on a

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!\,(n-1-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!\,(n-p)!}[\frac{p}{n} + \frac{n-p}{n}] = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \\ &= \binom{n}{p}.\end{aligned}$$

(c) Montrer la formule du binôme de Newton : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

Preuve : On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P_n): \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$

— Initialisation. Pour $n = 0$, Gauche$= 1$ et Droite$= 1$. C'est évident que (P_0) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). En effet,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} =&(a+b)\times(a+b)^n = (a+b)\times\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k}\right)\\ =&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}\,b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n+1-k}\\ =&\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}a^i\,b^{n+1-i}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i\,b^{n+1-i}\\ =&\sum_{i=1}^{n}[\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}]a^ib^{n+1-i}+\underbrace{a^{n+1}}_{i=n+1}+\underbrace{b^{n+1}}_{i=0}\end{aligned}$$

Par Triangle de Pascal, $\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}=\binom{n+1}{i}$ pour $1\le i\le n$. On en déduit que

$$(a+b)^{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^ib^{n+1-i}+a^{n+1}+b^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^ib^{n+1-i}.$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k}$.

3. Mise en pratique.

(a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$.

Solution : Si on prend $a = b = 1$ dans la formule de Newton, on a

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n.$$

Si on prend $a = -1$ et $b = 1$ dans la formule de Newton, on a

$$(-1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0.$$

(b) Montrer que pour tous entiers n et p tels que $1\le p\le n$:

$$p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}.$$

Preuve : Par définition, pour $1\le p\le n$,

$$\begin{aligned}p\binom{n}{p}=&p\times\frac{n!}{p!\,(n-p)!}=\frac{n!}{(p-1)!\,(n-p)!}\\ =&n\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}=n\binom{n-1}{p-1}.\end{aligned}$$

(c) En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

Solution : Par (b) et (a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=&\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\\ =&n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}=n2^{n-1}.\end{aligned}$$

Exercice 9. **(Factorisation de $a^n - b^n$)**
Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k} .$$

Preuve : Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(P_n) : \qquad a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k} .$$

— Initialisation. Pour $n = 1$, $a^n - b^n = (a-b) \times 1$. C'est évident que (P_1) est vrai.
— Hérédité. Supposons que (P_n) est vrai. On va vérifier (P_{n+1}). En effet,

$$\begin{aligned}
a^{n+1} - b^{n+1} &= a(a^n - b^n) + b^n(a-b) \\
&= a(a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k} + b^n(a-b) \\
&= (a-b) \times \left[\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}\, b^{n-1-k} + b^n \right] \\
&= (a-b) \times \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} = (a-b) \times \sum_{i=0}^{(n+1)-1} a^i b^{(n+1)-1-i}.
\end{aligned}$$

Donc, (P_{n+1}) est vrai.
— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}$.

On peut aussi faire un raisonnement direct en commençant du membre de droite de l'égalité recherchée :

$$\begin{aligned}
(a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} + a^n b^0 - a^0 b^n \\
&= a^n - b^n.
\end{aligned}$$

Exercice 10. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

   Solution : Si on prend $a = x$ et $b = 1$ dans la formule de Newton, alors

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

   On obtient que $S_n(x) = (x+1)^n$.

2. En déduire la valeur de $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k$.

Solution : C'est évident que $S_n(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée est

$$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1}.$$

D'ici, on a $T_n(x) = xS_n'(x)$. D'autre coté, puisque $S_n(x) = (x+1)^n$, sa dérivée est

$$S_n'(x) = n(x+1)^{n-1}.$$

On en déduit que

$$T_n(x) = xS_n'(x) = nx(x+1)^{n-1}.$$

3. Retrouver la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution : En particulier, si $x = 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = T_n(1) = n2^{n-1},$$

c'est pareil que le résultat de l'Ex 8 (3c).

<u>Exercice 11.</u> Calculer les sommes suivantes. On pourra admettre les résultats de l'exercice 7.

1. $\sum_{k=5}^{11} k$	2. $\sum_{i=2}^{10} (3+5i)$	3. $\sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}$	4. $\sum_{i=2}^{10} \frac{48}{2^i}$
5. $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$	6. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$	7. Pour $n \geq 3$, $\sum_{k=3}^{n} 5$	8. $\sum_{k=1}^{n} (3k^2+2k+1)$
9. $\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1)$	10. $\sum_{k=1}^{n} 5^{2k}$	11. $\sum_{k=1}^{n} (2^k+k^2+1)$	12. $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}}$

Solution :

1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{11} k =& \sum_{k=1}^{11} k - \sum_{k=1}^{4} k \\ =& \frac{n(n+1)}{2}|_{n=11} - \frac{n(n+1)}{2}|_{n=4} \\ =& 66 - 10 = 56.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{10} (3+5i) =& 3*9 + 5*\sum_{i=1}^{10} i - 5 \\ =& 5*\frac{n(n+1)}{2}|_{n=10} + 27 - 5 \\ =& 5*55 + 22 = 297\end{aligned}$$

3. Rappelons que dans l'Ex 9, si on prend $b = 1$ et $a \neq 1$, on a

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} =& 6 * \sum_{k=5}^{11} (\frac{2}{3})^k \\
=& 6 * \left[\sum_{k=0}^{11} (\frac{2}{3})^k - \sum_{k=0}^{4} (\frac{2}{3})^k \right] \\
=& 6 * [\frac{(2/3)^{12} - 1}{2/3 - 1} - \frac{(2/3)^5 - 1}{2/3 - 1}] = 6 * \frac{(2/3)^5 - (2/3)^{12}}{1 - 2/3} \\
=& \frac{64}{27} * [1 - (\frac{2}{3})^7] = \frac{131776}{59049}.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{10} \frac{48}{2^i} =& 48 * \sum_{i=2}^{10} (\frac{1}{2})^i \\
=& 48 * \left[\sum_{i=0}^{10} (\frac{1}{2})^i - \sum_{i=0}^{1} (\frac{1}{2})^i \right] \\
=& 48 * [\frac{(1/2)^{11} - 1}{1/2 - 1} - \frac{3}{2}] = 24 - \frac{3}{64} = \frac{1533}{64}.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (2k + 1) =& 2 * \sum_{k=1}^{n} k + n \\
=& 2 * \frac{n(n + 1)}{2} + n = n(n + 1) + n \\
=& n^2 + 2n.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (-1)^k =& \sum_{k=0}^{n} (-1)^k - 1 \\
=& \frac{(-1)^{n+1} - 1}{-1 - 1} - 1 = \frac{(-1)^n - 1}{2}.
\end{aligned}$$

7. Pour $n \geq 3$,

$$\sum_{k=3}^{n} 5 = 5(n - 2).$$

8.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 2k + 1) =& 3 * \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2 * \sum_{k=1}^{n} k + n \\
=& 3 * \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + 2 * \frac{n(n + 1)}{2} + n \\
=& n^3 + \frac{5}{2} n^2 + \frac{5}{2} n
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) =& 2*\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k\\ =& 2*\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{2}\\ =& \frac{n^4+2n^3-n}{2}.\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 5^{2k} =& \sum_{k=0}^{n} (25)^k - 1\\ =& \frac{(25)^{n+1}-1}{25-1} - 1 = \frac{25^{n+1}-25}{24}.\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (2^k+k^2+1) =& \sum_{k=1}^{n} 2^k + \sum_{k=1}^{n} k^2 + n\\ =& \sum_{k=0}^{n} 2^k - 1 + \sum_{k=1}^{n} k^2 + n\\ =& \frac{2^{n+1}-1}{2-1} - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\\ =& 2^{n+1} + \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{7n}{6} - 2.\end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}} =& \frac{1}{4}*\sum_{k=1}^{n} (\frac{3}{4})^k\\ =& \frac{1}{4}*\left[\sum_{k=0}^{n} (\frac{3}{4})^k - 1\right]\\ =& \frac{1}{4}*[\frac{(3/4)^{n+1}-1}{3/4-1} - 1] = \frac{3}{4} - (\frac{3}{4})^{n+1}.\end{aligned}$$

<u>Exercice 12.</u> Calculer les produits suivants :

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 3$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$
3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$
4. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} q^k$
5. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} q^{2^k}$

Solution :

1.

$$\prod_{k=0}^{n} 3 = 3^{n+1}.$$

2.

$$\prod_{k=1}^{n} (2k) = 2^n \times n!.$$

3.

$$\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}$$
$$= \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

4.

$$\prod_{k=0}^{n} q^k = q^{\sum_{k=0}^{n} k}$$
$$= q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

5.

$$\prod_{k=0}^{n} q^{2^k} = q^{\sum_{k=0}^{n} 2^k}$$
$$= q^{\frac{2^{n+1}-1}{2-1}} = q^{2^{n+1}-1}$$

Exercice 13. **(Sommes et produits télescopiques)**

1. (a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.

   Solution : Notons que

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)+bk}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)}.$$

   On veut que

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1. \end{cases}$$

   Donc, on prend $a=1$ et $b=-1$ et on a

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

   (b) Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

   Solution : Par (a), on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

   (c) En déduire la limite de la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque $n \to +\infty$.

   Solution :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Solution : En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \ln(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}))\\ &= \ln(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}) = \ln\left(\frac{\prod_{k=2}^{n+1} k}{\prod_{k=1}^{n} k}\right)\\ &= \ln(\frac{(n+1)!}{n!}) = \ln(n+1).\end{aligned}$$

3. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Solution : En effet,

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}\\ &= \left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\right)\times\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\right)\\ &= \frac{n+1}{2}\times\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

4. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k \times k!$.

Solution : En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\times k! &= \sum_{k=0}^{n}(k+1-1)\times k!\\ &= \sum_{k=0}^{n}[(k+1)!-k!] = \sum_{k=1}^{n+1} k! - \sum_{k=0}^{n} k!\\ &= (n+1)!-1.\end{aligned}$$

<u>Exercice 14.</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k}).$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(-n)$?

Solution : Observons que

$$P_n(0) = 1,\ P_n(1) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1+k}{k} = n+1.$$

Pour $x=-n$, $1+\frac{x}{k}=0$ lorsque $k=n$. Donc, $P_n(-n)=0$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$P_n(x) = \frac{x+n}{x}P_n(x-1).$$

Solution : Notons que

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k}) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+x}{k}$$
$$= \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}{\prod_{k=1}^{n}k} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}{n!}.$$

Donc,

$$P_n(x-1) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+x-1)}{n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+x)}{n!}$$

D'ici, on a

$$P_n(x) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}{n!} = \frac{x+n}{x}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(k+x)}{n!} = \frac{x+n}{x}P_n(x-1).$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(k)$ comme un coefficient binomial.

Solution : Par calcul, on a

$$P_n(0) = 1,\ P_n(1) = n+1 = \binom{n+1}{1},\ P_n(2) = \frac{2+n}{2}P_n(1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \binom{n+2}{2}.$$

On conjecture que pour tout $k \geq 1$, et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(Q_k): \qquad P_n(k) = \binom{n+k}{k}.$$

On va le vérifier par récurrence.

— Initialisation. Pour $k = 1$, c'est évident que (Q_1) est vrai.

— Hérédité. Supposons que (Q_k) est vrai. On va vérifier (Q_{k+1}). En effet,

$$P_n(k+1) = \frac{k+1+n}{k+1}P_n(k) = \frac{k+1+n}{k+1}\binom{n+k}{k}$$
$$= \frac{k+1+n}{k+1} \times \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{(n+k+1)!}{n!(k+1)!}$$
$$= \binom{n+k+1}{k+1}.$$

Donc, (Q_{k+1}) est vrai.

— Conclusion. On conclut par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P_n(k) = \binom{n+k}{k}$.

Exercice 15. (Sommes doubles)

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}\Big)$
2. $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} ij$
3. $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$

Solution :

1. On observe que

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\mathbf{1}_{j\geq i}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{j}\mathbf{1}_{j\geq i}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{j}\right) = \sum_{j=1}^{n}1 = n.$$

2. On observe que

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} ij = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} ij)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} i * (\sum_{j=1}^{n} j) = \sum_{i=1}^{n} i * (\frac{n(n+1)}{2})$$
$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. On observe que

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=i}^{n} ij) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} ij\mathbf{1}_{j\geq i})$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} ij\mathbf{1}_{j\geq i}) = \sum_{j=1}^{n} j * (\sum_{i=1}^{j} i)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} j * (\frac{j(j+1)}{2}) = \sum_{j=1}^{n}(\frac{j^3}{2} + \frac{j^2}{2})$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{2} * \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2} * \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.$$