



**Solution :**

1.

a) Puisque  $A$  est non vide, alors

$$\begin{aligned}\inf A \text{ existe} &\iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x \\ &\iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, -m \geq -x \\ &\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, M \geq -x \\ &\iff \sup -A \text{ existe.}\end{aligned}$$

Soit  $x \in -A$ ,  $-x \in A$  donc par définition de la borne inférieure  $\inf A \leq -x$  et donc  $\forall x \in -A$ ,  $-\inf A \geq x$ , donc par définition de la borne supérieure,  $\sup(-A) \leq -\inf A$ .

Soit  $x \in A$ , alors  $-x \in -A$  donc  $-x \leq \sup(-A)$ . Donc  $\forall x \in A, x \geq -\sup(-A)$ , donc  $-\sup(-A) \leq \inf A$ . On en conclut que  $\sup A = \inf A$ .

b) On applique la question précédente à l'ensemble  $-A$ . On sait que  $\inf(-A)$  existe si et seulement si  $\sup(-(-A))$  existe. Or  $-(-A) = A$ , donc  $\inf(-A)$  existe si et seulement si  $\sup A$  existe. De plus  $\inf(-A) = -\sup(-(-A)) = -\sup A$ , d'où le résultat.

2.

a)  $A$  est majorée, donc il existe  $M$  tel que  $\forall x \in A, x \leq M$ . Or  $B \subset A$ , donc  $\forall x \in B, x \in A$  et donc  $x \leq M$ . Donc  $B$  est majorée et non vide et possède donc une borne supérieure. Enfin,  $\forall x \in B, x \in A$  donc  $\forall x \in B, x \leq \sup A$ , donc  $\sup B \leq \sup A$ .

b)  $A$  est minorée, et non vide, donc  $\forall x \in A, x \geq \inf A$ . Or  $\forall x \in B, x \in A$ , donc  $x \geq \inf A$ , donc d'une part  $B$  est minorée et non vide donc possède une borne inférieure, et d'autre part  $\inf B \geq \inf A$ .

3. Montrons que  $\sup(A+B)$  existe si et seulement si  $\sup A$  et  $\sup B$  existent. On commence par le sens  $\sup(A+B)$  existe  $\iff \sup A$  et  $\sup B$  existent.

On suppose donc que  $\sup A$  et  $\sup B$  existent. Alors  $\forall (a, b) \in A \times B, a \leq \sup A$  et  $b \leq \sup B$ , donc  $a + b \leq \sup A + \sup B$ , donc  $A + B$  est majorée, non vide, et admet donc une borne supérieure. De plus,  $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$ .

Traisons le sens direct par contraposée. Montrons donc que  $\text{non}(\sup A \text{ et } \sup B \text{ existent}) \implies \text{non}(\sup(A+B) \text{ existe})$ .

On suppose donc que  $A$  ou  $B$  n'est pas majorée. Puisque  $A$  et  $B$  jouent un rôle symétrique, on peut supposer que  $A$  n'est pas majorée (quitte à échanger les noms de  $A$  et  $B$ ), c'est à dire qu'il existe une suite d'éléments de  $A$  que l'on note  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Soit  $b \in B$ . Alors la suite  $b_n = a_n + b$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tend elle aussi vers  $+\infty$  par somme des limites. Or c'est une suite d'éléments de  $A + B$ . Donc  $A + B$  n'est pas majorée, elle n'a donc pas de borne supérieure.

Reste à prouver que lorsque ces bornes supérieures existent,  $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$ , puisqu'on a déjà montré l'inégalité inversée. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $\sup A$ , et soit  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $B$  qui converge vers  $\sup B$ . Alors la suite  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'éléments de  $A + B$  qui converge vers  $\sup A + \sup B$ , donc  $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$ , ce qui conclut l'exercice.

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction majorée. Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$f^*(y) = \sup_{x \leq y} f(x).$$

1. Illustrer la définition de  $f^*$  par des figures rapides sur différents exemples de fonctions  $f$ .
2. Déterminer  $f^*$  dans le cas où  $f$  est croissante.
3. Étudier la monotonie de  $f^*$ .

**Solution :**

1. Notons que  $f^*$  est toujours définie puisque  $f$  est majorée, donc admet une borne supérieure sur n'importe quel sous ensemble non vide de  $\mathbb{R}$ .
2. Si  $f$  est croissante, alors  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ . Ainsi  $\forall y \in \mathbb{R}, f^*(y) = \sup_{x \leq y} f(x) = \max_{x \leq y} f(x) = f(y)$  donc  $f^* = f$ .
3. Montrons que  $f^*$  est croissante. Soit  $z \geq y$ .  $f^*(z) = \sup_{x \leq z} f(x)$ , donc  $\forall x \leq z, f^*(z) \geq f(x)$ . Or  $\forall x \leq y$ , on a que  $x \leq z$  puisque  $z \geq y$ . Donc  $\forall x \leq y, f^*(z) \geq f(x)$ , et donc  $\sup_{x \leq y} f^*(z) \geq \sup_{x \leq y} f(x)$ . puisque l'expression  $f^*(z)$  ne dépend pas de  $x$ , on a que  $\sup_{x \leq y} f^*(z) = f^*(z)$  et donc  $f^*(z) \geq f^*(y)$ , c'est à dire que  $f^*$  est croissante.

**Exercice 4.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une fonction croissante. On veut établir que  $f$  possède un *point fixe*, c'est-à-dire qu'il existe  $x_0 \in [0, 1]$  tel que  $f(x_0) = x_0$ .

Posons

$$T = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}.$$

1. — Démontrer que  $T$  possède une borne inférieure  $t$ .  
— Démontrer que  $f(t)$  minore  $T$ .  
— Établir l'inclusion  $f(T) \subset T$ .  
— En déduire que  $t$  est un point fixe de  $f$ .
2. Ce résultat est-il toujours vrai pour une fonction croissante de  $[0, 1[$  dans  $[0, 1[$  ?

**Solution :**

1. —  $T$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$  puisque  $1 \in T$ , qui est minorée par 0, donc  $T$  admet une borne inférieure que l'on note  $t$ .  
— Pour tout  $x \in T, t \leq x$ , on a donc  $f(t) \leq f(x)$  puisque  $f$  est croissante, or  $x \in T$  donc  $f(x) \leq x$ , donc  $f(t) \leq x$ , c'est à dire que  $f(t)$  minore  $T$ .  
— Soit  $y \in f(T)$ , c'est à dire que  $\exists x \in T, f(x) = y$ . Puisque  $x \in T, y = f(x) \leq x$ , donc puisque  $f$  est croissante,  $f(y) \leq f(x) = y$ , donc  $y \in T$ , donc  $f(T) \subset T$ .  
— Nous venons de montrer en particulier que  $f(t) \in T$ . Puisque c'est un minorant de  $T$ , c'est que  $\inf T = f(t)$ , donc  $t = f(t)$  et c'est donc un point fixe.
2. Non! La fonction définie par  $f(x) = \frac{1+x}{2}$  est croissante et n'a pas de point fixe dans l'intervalle  $[0, 1]$ . La preuve précédente échoue parce que l'ensemble  $T$  est vide et n'a donc pas de borne inférieure!

**Exercice 5.** On appelle *nombre dyadique* tout nombre rationnel de la forme  $\frac{m}{2^n}$ , avec  $m \in \mathbf{Z}$  et  $n \in \mathbf{N}$ . Démontrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Solution :** Soit  $]a, b[$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ , c'est à dire tel que  $a < b$ . Montrons qu'il existe un nombre dyadique dans l'intervalle  $]a, b[$ . Puisque la suite de terme général  $u_n = \frac{1}{2^n}$  converge vers 0, il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $\frac{1}{2^n} < b - a$ , c'est à dire  $2^n b - 2^n a > 1$ . C'est donc qu'il existe un entier  $m \in \mathbf{Z}$  tel que  $2^n a < m < 2^n b$ . Et donc  $a < \frac{m}{2^n} < b$ . L'ensemble des nombres dyadiques est donc dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6.**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite à valeurs dans  $\mathbf{Z}$ .

Montrer que  $(u_n)$  converge si et seulement si elle est stationnaire, c'est-à-dire si elle est constante à partir d'un certain rang.

2. Soit  $D \subset \mathbf{Z}$  un ensemble non vide et majoré. Montrer que  $D$  possède un plus grand élément.

**Solution :**

1. Si  $(u_n)$  est stationnaire à partir du rang  $n_0$ , alors  $\forall \varepsilon > 0$  et  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n - u_{n_0}| = 0 < \varepsilon$ , donc  $(u_n)$  converge vers  $u_{n_0}$ . (Et ceci est vrai même si  $(u_n)$  est à valeur dans  $\mathbb{R}$ ).

Réciproquement, si  $(u_n)$  converge vers  $l \in \mathbb{R}$ , alors  $\exists n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n - l| \leq 1/4$ . En particulier, on a donc que  $|u_n - u_{n_0}| \leq |u_n - l| + |l - u_{n_0}| \leq 1/2$ . Or dans l'intervalle  $[u_{n_0} - 1/2, u_{n_0} + 1/2]$  il n'existe qu'un seul entier :  $u_{n_0}$ . Donc pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n$ , qui est un entier dans cet intervalle, ne peut être que  $u_{n_0}$ . La suite est donc stationnaire.

2. Puisque  $D$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée,  $D$  possède une borne supérieure  $d$ . Montrons que  $d \in D$  et que c'est donc le plus grand élément de  $D$ . Soit  $(d_n)$  une suite d'éléments de  $D$  qui converge vers  $d$ . Puisque c'est une suite d'éléments de  $\mathbf{Z}$ , alors d'après la question précédente elle est stationnaire. Il existe donc  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $d_{n_0} = d$  et donc  $d \in D$ .

**Exercice 7.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle convergeant vers  $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ .

Montrer qu'il existe  $N_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq N_0 \implies u_n \geq \frac{\ell}{2}$ .

**Solution :** Par définition,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ . On choisit  $\varepsilon = \ell/2$  et l'on a donc qu'il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n - \ell| \leq \ell/2$  et donc  $\ell - \ell/2 \leq u_n - \ell \leq \ell + \ell/2$  et donc  $u_n \geq \ell/2$ .

**Exercice 8.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite réelle bornée et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  convergeant vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$ .

1. On suppose  $\ell = 0$ . Montrer que  $(u_n v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\ell$ .

2. Est-ce toujours vrai si  $\ell \neq 0$ ?

**Solution :**

1. La suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée, il existe donc  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $|u_n| \leq M$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , c'est qu'il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , on ait  $|v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$  puisque  $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ . Ainsi pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ , ce qui est la définition de  $(u_n v_n)$  converge vers 0.

2. Non! La suite définie par  $u_n = (-1)^n$  est bornée par 1, la suite définie par  $v_n = 1$  converge vers 1, mais le produit des deux n'a pas de limite.

**Exercice 9.** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles convergentes. Étudier la convergence de la suite  $(\max\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  de deux manières différentes :

1. en commençant par chercher une expression simple de  $\max\{x, y\}$  en fonction de  $x$  et  $y$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$  (Indication : on pourra s'intéresser à  $\max\{x, y\} + \min\{x, y\}$  et  $\max\{x, y\} - \min\{x, y\}$ );
2. en revenant à la définition de la limite.

**Solution :**

1. Si  $x < y$ , alors  $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = y + x$ . Si au contraire,  $x > y$ , alors  $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$ . Si  $x = y$  bien entendu,  $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$ . Donc dans tous les cas,  $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$ . De même,  $\max\{x, y\} - \min\{x, y\} = |x - y|$ , pour s'en convaincre, il suffit de tester les trois cas.

Or

$$\max\{x, y\} = \frac{\max\{x, y\} + \min\{x, y\} + \max\{x, y\} - \min\{x, y\}}{2},$$

et donc

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

Ainsi puisque les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent, en notant respectivement leurs limites  $u$  et  $v$ , par somme de limites et continuité de la valeur absolue, la suite  $(\max\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{u+v+|u-v|}{2} = \max\{u, v\}$ .

2. Soit  $\varepsilon > 0$ , et notons  $u$  et  $v$  les limites de  $(u_n)$  et  $(v_n)$ . Distinguons deux cas :

— Si  $u = v$ , puisque  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent toutes les deux vers  $u$ , on a d'une part

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_n - u| \leq \varepsilon,$$

et d'autre part

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2, |v_n - u| \leq \varepsilon$$

et donc si  $n \geq n_1$  et  $n \geq n_2$ , c'est à dire si  $n \geq n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ , on a à la fois  $u_n \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$  et  $v_n \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$  donc  $\max\{u_n, v_n\} \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$  et donc en conclusion,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_3, |\max\{u_n, v_n\} - \max\{u, v\}| \leq \varepsilon,$$

c'est à dire  $(\max\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\max\{u, v\}$ .

— si  $u \neq v$ , alors par symétrie du problème, supposons que  $u > v$ . Alors puisque  $(u - v)/2 > 0$  on a d'une part

$$\exists n_4 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_4, |u_n - u| \leq (u - v)/2,$$

et d'autre part

$$\exists n_5 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_5, |v_n - v| \leq (u - v)/2,$$

et donc  $\forall n \geq \max\{n_4, n_5\}$ , on a  $v_n \leq (u + v)/2 \leq u_n$  et donc  $\max\{u_n, v_n\} = u_n$  à partir du rang  $n_6 = \max\{n_4, n_5\}$ . De ce fait, les deux suites partagent la même limite et donc  $(\max\{u_n, v_n\})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u = \max\{u, v\}$ .

**Exercice 10.** Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , dont le terme général est donné par :

- a)  $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ ,      b)  $u_n = \left(n + \frac{2}{n^2}\right)^3 - n^3$ ,      c)  $u_n = \left(n + \frac{1}{n}\right) \left(n - \frac{1}{n}\right) - n^2$ ,  
d)  $u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$ ,      e)  $u_n = \frac{(-1)^n}{n + 1}$ ,      f)  $u_n = \frac{2n^6 + 5n + 1}{n^6 - 2}$ ,  
g)  $u_n = (-1)^n n$ ,      h)  $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$ ,      i)  $u_n = \sqrt[n]{n}$ ,  
j)  $u_n = 2 + \frac{\sin(n) - 4}{n^2}$ ,      k)  $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$ ,      l)  $u_n = \frac{(-5)^n + n}{3^n - 1}$ ,  
m)  $u_n = \frac{n!}{n^n}$ .

**Solution :**

- a)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$  donc par le théorème des gendarmes,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .  
b)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^3 + 3n^2 \frac{2}{n^2} + 3n \frac{4}{n^4} + \frac{8}{n^6} - n^3 = 6 + \frac{12}{n^3} + \frac{8}{n^6}$  donc par somme de limites  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 6$ .  
c)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 + 1 - 1 - \frac{1}{n^2} - n^2 = \frac{-1}{n^2}$  donc  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .  
d)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{n-1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}+n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$  et donc par somme et produit de limites,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$ .  
e)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$  donc par le théorème des gendarmes,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .  
f)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2 + \frac{5}{n^5} + \frac{1}{n^6}}{1 - 2\frac{1}{n^5}}$  donc par somme et produit de limites,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$ .  
g) La suite  $(u_n)$  n'a pas de limite, puisque  $u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , mais  $u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ , limites qui ne sont pas égales.  
h)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(2/3)^n - 1}{(2/3)^{n+1} - 1}$ , or  $|2/3| < 1$  donc la suite géométrique de terme  $(2/3)^n$  converge vers 0, et donc par somme et produit de limites,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$ .  
i)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln(n)}$ . Par croissance comparée,  $\frac{1}{n} \ln(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , et donc par composition de limites,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .  
j)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 - \frac{5}{n^2} \leq u_n \leq 2 - \frac{3}{n^2}$ , donc par le théorème des gendarmes,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$ .  
k)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^1$  donc la suite est constante et converge vers son unique valeur,  $e$ .  
l)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-5/3)^n + \frac{n}{3^n}}{1 - (1/3)^n}$ . Par propriétés des suites géométriques,  $(1/3)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , par croissance comparée,  $\frac{n}{3^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , et la suite  $(5/3)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Ainsi la suite par somme et produit de limites,  $u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ , et  $u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ . Les limites n'étant pas égales, la suite  $(u_n)$  n'a pas de limite.  
m)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n = \frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{n \times n \times \dots \times n} \leq \frac{1}{n}$  donc d'après le théorème des gendarmes,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

**Exercice 11.** Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

**Solution :** Puisque la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2}}$$

donc

$$\frac{n}{n\sqrt{1 + 1/n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 1/n}} \leq u_n \leq 1$$

Puisque  $\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , d'après le théorème des gendarmes  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

**Exercice 12.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

1. Étudier la convergence des suites  $(u_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{n^2+n})_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas .

**Solution :**

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n^2} = \sqrt{n^2} - \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor = n - n = 0$ , et

$$\begin{aligned} u_{n^2+n} &= \sqrt{n^2+n} - \lfloor \sqrt{n^2+n} \rfloor \\ &= \sqrt{n^2+n} - n \quad \text{car } n^2 \leq n^2+n < (n+1)^2, \\ &= n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = n \frac{1 + \frac{1}{n} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Par somme, produit et composition de limites,  $u_{n^2+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ . Puisque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a deux sous suites qui convergent vers des valeurs différentes, alors elle ne converge pas.

**Exercice 13.** Irrationalité de  $e$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$  et  $v_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} + \frac{1}{n!}$ .

1. Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite.
2. Posons  $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . Nous allons démontrer que  $e$  est un nombre irrationnel en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'il existe deux entiers naturels  $p, q \geq 1$  tels que  $e = \frac{p}{q}$ .
  - Établir l'encadrement  $u_n < e < v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - Vérifier que  $q!u_q$  et  $q!v_q$  sont deux nombres entiers consécutifs.
  - Conclure le raisonnement.

**Solution :**

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

et

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} \left( \frac{2}{n+1} - 1 \right) \leq 0 \text{ car } 2 \leq n+1,$$

donc la suite  $(u_n)$  est croissante et la suite  $(v_n)$  est décroissante. De plus  $v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes. Ainsi, elles convergent vers la même limite.

2. — Puisque la suite  $(u_n)$  est strictement croissante, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n < e$ . Puisque la suite  $(v_n)$  est strictement décroissante à partir du rang 2, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $e < v_n$ .

— Puisque  $q!u_q = \sum_{p=0}^q \frac{q!}{p!} = (p+1) \times \dots \times q$ , la quantité  $q!u_q$  est donc un entier. De plus,  $q!v_q = q!u_q + \frac{q!}{q!} = q!u_q + 1$ , donc  $q!v_q$  est un entier égal  $q!u_q + 1$ .

— Puisque  $u_q < e < v_q$ , on a donc  $q!u_q < (q-1)!p < q!u_q + 1$ , l'entier  $(q-1)!p$  est donc compris strictement entre deux entiers consécutifs ce qui est impossible. Ainsi,  $e$  n'est pas rationnel.

**Exercice 14.**

1. Montrer que pour tout  $x \geq 0$  on a :  $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$ .

2. En déduire la limite des suites de terme général :

a)  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

b)  $v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ .

**Solution :**

1. Soit  $f : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ , définie sur  $] -1, +\infty[$  et dérivable. On a d'une part  $f(0) = 0$  et d'autre part pour tout  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1+(1+x)(-1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$ . La fonction  $f$  est croissante sur  $[0, \infty[$  et donc pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) \geq f(0) = 0$ , c'est à dire que  $\ln(1+x) \geq x - \frac{1}{2}x^2$ . De même, on dérive  $g(x) = \ln(x+1) - x$  pour obtenir  $g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} \leq 0$ , et puisque  $g(0) = 0$ , par décroissance de  $g$  on a  $\ln(x+1) \leq x$  pour tout  $x \geq 0$ .

2. a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $u_n = e^{n \ln(1+1/n)}$  donc puisque la fonction exponentielle est croissante, on a

$$e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right)} \leq u_n \leq e^{\frac{n}{n}}$$

c'est à dire

$$e^{1 - \frac{1}{2n}} \leq u_n \leq e,$$

et donc d'après le théorème des gendarmes,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$ .

b) On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ln(v_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ , et donc

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2} \frac{k^2}{n^4} \right) \leq \ln(v_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

par conséquent

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} \leq \ln(v_n) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

On a  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , et  $\frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$ . Ainsi la suite  $(\ln(v_n))$  converge vers  $\frac{1}{2}$  et donc par composition avec l'exponentielle, la suite  $(u_n)$  converge vers  $e^{1/2}$ .



**Exercice 15.** Somme harmonique

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$ .
2. En déduire la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Solution :**

1. Pour tout  $x \in [k, k+1]$ ,  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ , donc  $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k}$ .
2. On a donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

**Exercice 16.** Lemme de Cesàro.

1. Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On définit la suite  $(v_n)$  dont le terme général est la moyenne arithmétique des  $n$  premiers termes de la suite  $(u_n)$  :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

Montrer que si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  alors  $(v_n)$  converge également vers  $\ell$ .

2. Soit  $(u_n)$  une suite réelle. On suppose que la suite  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ . Démontrer que la suite  $(\frac{u_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ell$ .
3. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite strictement positive telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Démontrer que la suite  $(\sqrt[n]{u_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ell$ .

4. Déduire de ce qui précède

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

(Indication : pour la seconde suite, on pourra utiliser l'exercice 14)

**Solution :**

1. On suppose d'abord que  $\ell \in \mathbb{R}$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On sait qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$ . De plus, la suite  $\frac{1}{n}$  converge vers 0. Donc il existe un rang  $n_1$  tel que pour tout  $n \geq n_1$  et pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n_0$  on ait  $\frac{|u_k - \ell|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{n_0}$ . Ceci est possible parce qu'on a pris un nombre fini et fixé d'indices  $k$  (ou parce que la suite  $(u_n)$  converge et donc est bornée). Ainsi pour tout  $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ , on a

$$v_n - \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} (u_k - \ell) + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n (u_k - \ell)$$

et donc

$$|v_n - \ell| \leq \frac{n_0 \varepsilon}{n_0} + \frac{n - n_0 - 1}{n} \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi,  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

On suppose désormais que  $l = +\infty$ . Soit  $M \in \mathbb{R}_+^*$ . On sait qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,  $u_n > 2M + 2$ . On sait ensuite que la suite  $(u_n)$  est minorée, puisqu'elle diverge vers  $+\infty$ , il existe donc  $m \in \mathbb{R}$  minorant la suite  $(u_n)$  et donc il existe un rang  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \geq n_1$  et pour tout  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n_0$  on ait  $\frac{u_k}{n} \geq \frac{m}{n} \geq -\frac{1}{n_0}$ , puisque  $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Ainsi pour tout  $n \neq \max\{n_1, n_2\}$ , on a

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n u_k \geq \frac{-n_0}{n_0} + \frac{n - n_0 - 1}{n} (2M + 2).$$

Puisque  $\frac{n - n_0 - 1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ , il existe un rang  $n_2$  tel que pour tout  $n \geq n_2$ ,  $\frac{n - n_0 - 1}{n} > \frac{1}{2}$ . Par conséquent, pour tout  $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$ , on a  $v_n \geq M$ , et donc  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

Si  $l = -\infty$ , alors  $-u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et donc  $-v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  comme on vient de le prouver, c'est à dire que  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ .

2. Utilisons la question précédente en introduisant les suites définies pour  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $a_n = u_{n+1} - u_n$  et  $b_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ . On a donc que  $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k)$  qui est une somme télescopique : en effet, on a

$$\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^n u_{k+1} - \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=2}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = u_{n+1} - u_1.$$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_n = \frac{u_{n+1} - u_1}{n}$ . Or la suite  $\left(\frac{u_0}{n}\right)$  est une suite qui converge vers 0, et donc la suite  $(b_n)$  a la même convergence que la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{n}\right)$ . D'après le lemme de Cesàro précédemment démontré, puisque  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , on sait que  $b_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Puisque  $\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ , par produit de limites la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{n+1}\right)$  tend elle aussi vers  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , et donc la suite  $\left(\frac{u_n}{n}\right)$  aussi.

3. On introduit cette fois  $a_n = \ln(u_n)$ , bien définie puisque  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On a alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} - a_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(\ell)$  par composition des limites si  $\ell \in \mathbb{R}$ , et diverge vers  $+\infty$  si  $\ell = +\infty$ . On peut donc appliquer la question précédente à la suite  $(a_n)$  : on sait alors que  $\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln \ell$  si  $\ell \in \mathbb{R}$ , et vers  $+\infty$  si  $\ell = +\infty$ .

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sqrt[n]{u_n} = e^{\frac{1}{n} \ln(u_n)} = e^{\frac{a_n}{n}}$ , et par composition des limites,  $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{\ln(\ell)} = \ell$  si  $\ell \in \mathbb{R}$ , et  $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  si  $\ell = +\infty$ , ce qui conclut la preuve.

4. On pose  $u_n = \binom{2n}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Calculons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n!)^2 (2n+2)!}{(2n)! (n+1)!^2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)!^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4.$$

Donc d'après la question précédente,  $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 4$ .

De même, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  posons  $v_n = \frac{n^n}{n!}$ , et calculons :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^n (n+1)!}{n! (n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{n+1}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$$

d'après l'exercice 14. Ainsi, puisque  $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{v_n}$ , on sait d'après la question précédente que  $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e$ .

**Exercice 17.** Suites arithmético-géométriques.

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a \neq 1$  et soit  $u^{(0)} \in \mathbb{R}$ . On définit par récurrence  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :  $u_0 = u^{(0)}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = au_n + b$ .

1. Montrer qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha = a\alpha + b$ .
2. Montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4. Étudier la convergence de  $(u_n)$ . (*Indication : on distinguera les cas  $|a| < 1$ ,  $a > 1$  et  $a \leq -1$* ).
5. Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la somme  $\sum_{k=0}^n u_k$ .

**Solution :**

1. L'équation  $\alpha = a\alpha + b$  est équivalente à  $\alpha(1 - a) = b$ . Celle-ci possède une solution,  $\frac{b}{1-a}$  puisque  $a \neq 1$ .
2. Calculons :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - (a\alpha + b) = a(u_n - \alpha) = av_n$ , donc  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $a$ .
3. Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0 a^n = (u_0 - \alpha)a^n$  et donc  $u_n = v_n + \alpha = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$ .
4. La convergence dépend de la valeur de  $a$ , ainsi que du signe de  $(u_0 - \alpha)$ .
  - Si  $u_0 = \alpha$ , alors la suite est constante égale à  $u_0$ .
  - Si  $u_0 \neq \alpha$ , alors si  $|a| < 1$  la suite converge vers  $\alpha$ , si  $a > 1$  alors la suite diverge vers l'infini du signe de  $u_0 - \alpha$ , et si  $a \leq -1$  alors la suite n'a pas de limite.
5. Calculons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n [(u_0 - \alpha)a^k + \alpha] = (u_0 - \alpha) \sum_{k=0}^n a^k + \sum_{k=0}^n \alpha = (u_0 - \alpha) \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + (n+1)\alpha.$$

**Exercice 18.**

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n), & \forall n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 2x(1 - x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Dresser le tableau des variations de  $f$  et dessiner son graphe.
2. Étudier le signe de  $f(x) - x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Montrer que si  $(u_n)$  converge, alors elle converge vers un point fixe de  $f$ . Déterminer les points fixes de  $f$ . Que peut-on dire de la suite  $(u_n)$  si  $u_0$  est l'un des points fixes de  $f$  ?
4. Montrer que les intervalles  $] - \infty, 0[$  et  $]0, 1/2[$  sont stables par  $f$  et que  $f$  est croissante sur ces intervalles. *On dit qu'un intervalle  $I$  est stable par  $f$  si  $f(I) \subset I$ .*
5. On suppose que  $u_0 \in ]0, 1/2[$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est alors croissante (*On pourra s'aider de la question 3.*) En déduire la nature de la suite  $(u_n)$ . Même question si  $u_0 \in ] - \infty, 0[$ .
6. Étudier la nature de la suite  $(u_n)$  lorsque  $u_0 \in ]1/2, +\infty[$ .

**Solution :**

1. Puisque pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2 - 4x$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  on a :

|         |           |               |           |
|---------|-----------|---------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0             | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $-\infty$ |

2.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) - x = -2x^2 + x = x(1 - 2x)$ . Dressons un tableau de signe :

|            |           |   |               |           |
|------------|-----------|---|---------------|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
| $x$        | -         | 0 | +             | +         |
| $1 - 2x$   | +         | + | 0             | -         |
| $f(x) - x$ | -         | 0 | +             | 0         |

3. Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ , par passage à la limite dans la relation de récurrence, on a  $\ell = 2\ell(1 - \ell)$  c'est à dire  $\ell = f(\ell)$ . D'après le tableau de signe, les points fixes de  $f$  sont 0 et  $1/2$ . Si la suite démarre à un point fixe, puisque  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $(u_n)$  est constante.

4. On a déjà montré que  $f$  est strictement croissante sur ces deux intervalles. Il suffit donc de montrer que pour tout  $x < 0$ ,  $f(x) < 0$  pour montrer que  $] - \infty, 0[$  est stable, et que  $\forall x \in ]0, 1/2[$ ,  $f(x) \in ]0, 1/2[$ . Puisque  $f(0) = 0$  et  $f(1/2) = 1/2$ , ceci est prouvé.

5. Montrons par récurrence que de façon générale si  $u_0 \in I$  où  $I$  est un intervalle stable, alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in I$ . On note  $H_n : "u_n \in I$ .  $H_0$  est vraie puisque  $u_0 \in I$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et supposons  $H_n$ . Puisque  $u_{n+1} = f(u_n)$ , et  $u_n \in I$  par hypothèse de récurrence, puisque  $I$  est stable on a donc  $u_{n+1} \in I$  c'est à dire  $H_{n+1}$ , ce qui conclut la récurrence.

Ainsi dans notre cas,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_0 \in ]0, 1/2[$ , intervalle sur lequel  $f(x) > x$ . Puisque  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on a donc  $u_{n+1} > u_n$ . La suite  $(u_n)$  est donc strictement croissante. Elle est également majorée puisque évolue dans l'intervalle  $]0, 1/2[$ . Ainsi elle converge, et donc d'après la question 3, elle converge vers 0 ou  $1/2$ . Puisqu'elle est croissante et  $u_0 > 0$ , elle converge nécessairement vers  $1/2$ . De même, si  $u_0 \in ] - \infty, 0[$ , c'est un intervalle stable donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ] - \infty, 0[$ , intervalle sur lequel  $f(x) < x$ , donc  $(u_n)$  est décroissante. Si  $(u_n)$  était minorée, elle convergerait vers 0 ou  $1/2$ , ce qui est impossible. Elle est donc décroissante et non minorée, c'est donc qu'elle diverge vers  $-\infty$ .

6. Cette fois ci, l'intervalle  $]1/2, +\infty[$  n'est pas stable. Au contraire, si  $u_0 \in ]1/2, +\infty[$ , alors d'après le tableau de variation déjà dressé,  $u_1 \in ] - \infty, 1/2[$ , et l'on est ramené au cas précédent. Précisément, puisque  $f(1) = 0$ , alors si  $u_0 \in ] - 1/2, 1[$ ,  $u_1 \in ]0, 1/2[$  et  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1/2$ , si  $u_0 = 1$  alors  $u_1 = 0$  et  $(u_n)$  est stationnaire à partir du rang 1, et si  $u_0 > 1$ , alors  $u_1 \in ] - \infty, 0[$  et  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ .

**Exercice 19.**

Le but de cet exercice est d'étudier la suite définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n(u_n^2 - 1), & \forall n \geq 0, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x(x^2 - 1)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Répéter pour  $f$  l'étude des questions 1 à 3 de l'exercice précédent.
2. Montrer que l'intervalle  $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$  est stable par  $f$  et que  $f$  est décroissante sur cet intervalle.
3. On suppose que  $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ . Montrer que les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones et déterminer leur monotonie en fonction du signe de  $u_0$  (On pourra montrer que pour  $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ , on a  $|f(x)| \leq |x|$ ). Montrer que ces suites sont convergentes et déterminer leurs limites.
4. En déduire la nature de la suite  $(u_n)$  lorsque  $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ .
5. On suppose que  $u_0 \in ]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ . Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ . En déduire la nature de la suite  $(u_n)$  lorsque  $u_0 \in ]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ . Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  lorsque  $u_0 \in ]\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}[$  ?
6. Étudier la nature de la suite  $(u_n)$  lorsque  $u_0 \in ]-\infty, -\sqrt{2}[$  et lorsque  $u_0 \in ]\sqrt{2}, +\infty[$ .

**Solution :**

1. On pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 1$  qui satisfait  $f(x) = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $f(x) < 0 \iff x \in ]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}[$  et l'on a également  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ . Ainsi,

|         |           |                       |                       |            |                        |            |           |
|---------|-----------|-----------------------|-----------------------|------------|------------------------|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$  | $+\infty$  |                        |            |           |
| $f'(x)$ |           | -                     | 0                     | +          | 0                      | -          |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow$            | $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ | $\searrow$ | $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

De plus  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) - x = x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$ . Dressons un tableau de signe :

|            |           |             |     |            |           |   |   |   |
|------------|-----------|-------------|-----|------------|-----------|---|---|---|
| $x$        | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$ | $0$ | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |   |   |   |
| $x$        |           | -           | -   | 0          | +         | + |   |   |
| $x^2 - 2$  |           | +           | 0   | -          | -         | 0 | + |   |
| $f(x) - x$ |           | -           | 0   | +          | 0         | - | 0 | + |

Enfin, si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ , par passage à la limite dans la relation de récurrence, on a  $\ell = f(\ell)$ . D'après le tableau de signe, les points fixes de  $f$  sont  $-\sqrt{2}$ ,  $0$  et  $\sqrt{2}$ . Si la suite démarre à un point fixe, puisque  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $(u_n)$  est constante.

2. On a déjà démontré que  $f$  est décroissante dans cet intervalle. D'après le tableau de variation la fonction  $f$  y est donc stable si  $[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}] \subset [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$  ce qui est le cas puisque  $2/3 \leq 1$ .

3 et 4. Puisque  $f(0) = 0$ , on remarque plus précisément que  $f([-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]) = [0, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$  et  $f([0, \frac{1}{\sqrt{3}}] = [-\frac{2}{3\sqrt{3}}, 0]$ . De fait  $f \circ f([[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]]) \subset [-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$  et  $f \circ f([0, \frac{1}{\sqrt{3}}]) \subset [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ , donc les deux intervalles sont stables pour  $f \circ f$  qui satisfait à la fois  $u_{2(n+1)} = f \circ f(u_n)$  et  $u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$ . Puisque  $\sqrt{2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ , on sait donc que  $f(x) - x$  est positif sur l'intervalle  $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$  et donc  $f(f(x)) \geq f(x) \geq x$  également sur ce même intervalle, et de même que  $f(f(x)) - x$  est négatif sur l'intervalle  $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$ .

Ainsi si  $u_0 \in [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ , alors la suite  $(u_{2n})$  évolue dans l'intervalle  $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$  et est donc suite décroissante minorée, donc convergente, et ce nécessairement vers 0. De plus la suite  $(u_{2n+1})$  évolue dans l'intervalle  $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$ , c'est donc une suite croissante majorée, donc converge également vers 0, et de fait,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Si  $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0]$  les rôles de  $u_{2n}$  et  $u_{2n+1}$  sont inversés, mais la conclusion reste la même, les deux sous suites convergent vers 0, la suite  $(u_n)$  converge donc vers 0 pour tout  $u_0 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ .

5. Si  $u_0 \in ]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ , d'après le tableau de signe alors  $u_1 = f(u_0) > u_0$ . Deux cas se produisent alors : soit  $u_1 \in ]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ , et l'on peut répéter le raisonnement pour  $u_1$ , soit  $u_1 \notin ]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$  et alors d'après le tableau de variations de  $f$ ,  $u_1 \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}] \subset [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ .

Deux occurrences surviennent donc : soit  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ , soit  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in ]-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}[$ . Dans ce cas,  $(u_n)$  serait une suite croissante majorée donc convergente, or elle ne pourrait converger que vers  $-\sqrt{2}, 0$  ou  $\sqrt{2}$ , ce qui sont trois possibilités absurdes. Cette occurrence est donc impossible et nécessairement,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ .

6. (cf exercice précédent) Sur l'intervalle  $] -\infty, -\sqrt{2}[$  on a  $f(x) < x$  et donc par récurrence, la suite  $(u_n)$  est décroissante. Puisqu'elle ne peut converger que vers des valeurs qui ne lui sont pas accessibles, c'est que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ . De même, sur l'intervalle  $]\sqrt{2}, +\infty[$  on a  $f(x) > x$  et donc la suite  $(u_n)$  est croissante, et ne pouvant pas converger, c'est qu'elle diverge vers  $+\infty$ .

### **Exercice 20.**

En suivant la démarche des exercices 18 et 19, étudier les suites définies par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ , où la fonction  $f$  est donnée par :

- |                          |                       |                             |
|--------------------------|-----------------------|-----------------------------|
| a) $f(x) = x^2$ ,        | b) $f(x) = x^2 + 1$ , | c) $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,    |
| d) $f(x) = 1 + \ln(x)$ , | e) $f(x) = e^x - 1$ , | f) $f(x) = \frac{1}{2+x}$ . |

Pour certaines valeurs de  $u_0$ , la suite  $(u_n)$  peut ne pas être définie à partir d'un certain rang.

**Solution :** Rédaction PARTIELLE s'appuyant sur les exercices précédents.

- a) La fonction  $f$  a deux points fixes, 0 et 1. Elle est décroissante sur  $\mathbb{R}^-$  et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Enfin,  $f(x) \leq x \iff x \in [0, 1]$ . L'intervalle  $[0, 1]$  est donc stabilisé. L'intervalle  $[-1, 0]$  est envoyé dans l'intervalle  $[0, 1]$ , et l'intervalle  $] -\infty, -1[$  est envoyé dans l'intervalle  $[1, +\infty[$ , qui lui aussi est stabilisé. De fait, si  $|u_0| > 1$  la suite  $(u_n)$  est croissante à partir du rang 1 et ne pouvant pas converger vers un point fixe de  $f$  tend donc vers  $+\infty$ . Si  $u_0 = |1|$  alors la suite est stationnaire à partir du rang 1 donc converge vers 1. Enfin, si  $|u_0| < 1$ , la suite est décroissante à partir du rang 1 et est bornée donc converge vers 0 (puisque 1 n'est pas accessible).
- b) Puisque l'équation  $f(x) = x$  n'a pas de solution,  $f(x) > x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi la suite  $(u_n)$  est croissante et ne peut converger puisque  $f$  n'a pas de point fixe, donc diverge vers  $+\infty$ .

- c) La fonction  $f$  est définie sur  $I = [-1, +\infty[$ , donc on se restreint à  $u_0 \in I$ . L'équation  $f(x) = x$  a une unique solution, qui est  $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ . Puisque  $f$  est croissante sur  $I$ ,  $f$  stabilise les deux intervalles  $[-1, \varphi]$  et  $[\varphi, +\infty[$ . Dans l'intervalle  $[-1, \varphi]$ ,  $f(x) \geq x$ , et dans l'intervalle  $[\varphi, +\infty[$ ,  $f(x) \leq x$ . Ainsi si  $u_0 \in [\varphi, +\infty[$  la suite est décroissante et minorée donc converge vers le point fixe  $\varphi$ . Si  $u_0 \in [-1, \varphi]$  alors la suite est croissante et majorée donc converge vers le point fixe  $\varphi$ . Ainsi quel que soit  $u_0 \in I$ ,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \varphi$ .
- d) Puisque  $f$  est définie sur  $I = ]0, +\infty[$ , on se restreint à  $u_0 \in I$ . L'équation  $f(x) = x$  a une unique solution, qui est 1. Puisque  $f$  est croissante, l'intervalle  $[1, +\infty[$  est donc stabilisé. Sur  $I$  entier on a  $f(x) \leq x$  donc la suite  $(u_n)$  est toujours décroissante. Ainsi si  $u_0 \in [1, +\infty[$ , elle converge vers 1. En revanche, si  $u_0 < 1$ , alors la suite étant décroissante et ne pouvant pas converger, il existe un rang  $n$  tel que  $u_n < e^{-1}$ , et alors  $u_{n+1} < 0$  et donc la suite n'est plus définie à partir de ce rang.
- e) La fonction  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ . De plus l'équation  $f(x) = x$  a une unique solution, 0. Les intervalles  $\mathbb{R}_-$  et  $\mathbb{R}_+$  sont donc stabilisés. De plus, sur  $\mathbb{R}_-$  on a  $f(x) \geq x$ , et sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $f(x) \leq x$  également. Donc la suite  $(u_n)$  est toujours croissante. Ainsi si  $u_0 \in \mathbb{R}_-$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , et si  $u_0 > 0$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .
- f) La fonction  $f$  a deux points fixes,  $-1 - \sqrt{2}$  et  $-1 + \sqrt{2}$ . Dressons le tableau de variation de  $x \mapsto f(x) - x$  :

|            |           |                 |           |                 |           |
|------------|-----------|-----------------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$        | $-\infty$ | $-1 - \sqrt{2}$ | $-2$      | $-1 + \sqrt{2}$ | $+\infty$ |
| $f(x) - x$ | $+\infty$ | $0$             | $-\infty$ | $+\infty$       | $-\infty$ |

et celui de  $f$  :

|        |           |                 |           |                 |           |
|--------|-----------|-----------------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-1 - \sqrt{2}$ | $-2$      | $-1 + \sqrt{2}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $0$       | $-1 - \sqrt{2}$ | $-\infty$ | $+\infty$       | $0$       |

On voit donc que l'intervalle  $] -2, +\infty[$  est stabilisé. Or  $f$  y est décroissante, donc  $f \circ f$  stabilise les intervalles  $] -2, -1 + \sqrt{2}]$  et  $[-1 + \sqrt{2}, +\infty[$ . Sur ces intervalles,  $f \circ f$  est croissante et donc l'étude de  $f(x) - x$  nous donne que si  $u_0 \in ] -2, +\infty[$ , les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones, celle évoluant dans l'intervalle  $] -2, -1 + \sqrt{2}]$  est croissante, et l'autre est décroissante. Donc les deux convergent vers  $-1 + \sqrt{2}$ , et donc  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1 + \sqrt{2}$ .

Le comportement de la suite pour  $u_0 < -2$  est très long à étudier !

### Exercice 21.

- Montrer que :  $\forall x \in [3, 5], 3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$ .
- On définit  $\varphi : [3, 5] \rightarrow [3, 5], x \mapsto 3 + \frac{4}{x}$ .
  - Déterminer l'ensemble des points fixes de  $\varphi$ .
  - Montrer que :  $\forall x \in [3, 5], |\varphi(x) - 4| \leq \frac{|x-4|}{2}$ .

3. On considère la suite  $(u_n) \in [3, 5]^{\mathbb{N}^*}$  définie par  $u_1 = 5$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} = 3 + \frac{4}{u_n}$ .
- Montrer que  $(u_n)$  converge et donner sa limite  $\ell$ .
  - Déterminer un entier  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n \geq N$ ,  $u_n$  soit une valeur approchée de  $\ell$  à  $10^{-6}$  près.

**Solution :**

- Pour tout  $x \in [3, 5]$ , on a  $3 \leq x \leq 5$  donc  $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$  et ainsi  $3 + \frac{4}{5} \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 3 + \frac{4}{3}$ . Puisque  $3 \leq 3 + \frac{4}{5}$  et  $3 + \frac{4}{3} \leq 5$ , a on bien  $3 \leq 3 + \frac{4}{x} \leq 5$ .
- a) On résout pour  $x \in [3, 5]$ ,

$$\varphi(x) = x \iff 3 + \frac{4}{x} = x \iff x^2 - 3x - 4 = 0 \iff x = \frac{3 \pm 5}{2} \iff x = 4.$$

- Calculons pour  $x \in [3, 5]$ ,  $|\varphi(x) - 4| = |3 + \frac{4}{x} - 4| = |\frac{4-x}{x}| \leq \frac{|x-4|}{3} \leq \frac{|x-4|}{2}$  car  $x \geq 3$ .
- a) En appliquant la question précédente à  $u_n$ , on a donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{1}{2}|u_n - 4|$ . Ainsi la suite  $v_n = |u_n - 4|$  vérifie  $v_{n+1} \leq \frac{1}{2}v_n$ . Par une récurrence immédiate, ceci donne que  $v_n \leq v_1 \frac{1}{2^{n-1}}$ . Puisque  $v_n \geq 0$ , alors  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , c'est à dire  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$ .
  - On cherche  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $|u_N - 4| \leq 10^{-6}$ , c'est à dire  $v_n \leq 10^{-6}$ , c'est à dire  $v_1 2^{-N+1} \leq 10^{-6}$ . Or  $u_1 = 5$  donc  $v_1 = 1$  et donc en appliquant le logarithme,  $(-N+1) \ln(2) \leq -6 \ln(10)$ , c'est à dire  $N \geq \frac{6 \ln(10)}{\ln(2)} + 1$ . N'importe quel entier supérieur à ce nombre convient, et par exemple 21 convient.

**Exercice 22.** Calcul approché de  $\sqrt{a}$ .

Soit  $a > 0$  et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right)$ .

- Donner l'ensemble de définition et le tableau de variations de la fonction  $\varphi : x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$ .
- Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .
- On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$ .  
Calculer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ , puis  $v_n$  en fonction de  $v_0$  et  $n$ .
- Montrer que, si  $u_0 > \sqrt{a}$ , on a  $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0.v_0^{2^n}$ .

Ainsi,  $u_n$  réalise une approximation de  $\sqrt{a}$  à la précision  $2u_0.v_0^{2^n}$ .

**Solution :**

- En raison du terme  $\frac{1}{x}$ , l'ensemble de définition de  $\varphi$  est  $\mathbb{R}^*$ . Elle est dérivable sur cet ensemble et  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$ . On résout  $\varphi'(x) = 0 \iff x^2 = a \iff x = \pm\sqrt{a}$ , et  $\varphi'(x) < 0 \iff x \in ]-\sqrt{a}, \sqrt{a}[ \setminus \{0\}$ . Après le calcul des limites, on a donc

|               |           |             |           |            |           |
|---------------|-----------|-------------|-----------|------------|-----------|
| $x$           | $-\infty$ | $-\sqrt{a}$ | $0$       | $\sqrt{a}$ | $+\infty$ |
| $\varphi'(x)$ |           | +           | 0         | -          |           |
| $\varphi(x)$  | $-\infty$ | $-\sqrt{a}$ | $-\infty$ | $+\infty$  | $+\infty$ |



2. On remarque tout d'abord que pour tout  $x > 0$ ,  $\varphi(x) > 0$ , donc par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ . Ensuite, on remarque que l'intervalle  $[\sqrt{a}, +\infty[$  est stable puisque  $\varphi([\sqrt{a}, +\infty[) = [\sqrt{a}, +\infty[$ . Enfin,  $\varphi(]0, \sqrt{a}[) = [\sqrt{a}, +\infty[$ , et donc pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n \in [\sqrt{a}, +\infty[$ . Or  $\varphi(x) - x = \frac{a-x^2}{2x}$  et donc sur l'intervalle  $[\sqrt{a}, +\infty[$ , on a  $\varphi(x) - x \leq 0$ , donc la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang 1. Elle est donc décroissante et minorée, donc converge vers un point fixe de  $f$ . D'après le tableau de variation  $f$  a deux points fixes,  $\pm\sqrt{a}$ . Puisque  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , c'est que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{a}$ .

3. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n} - 2\sqrt{a}}{u_n + \frac{a}{u_n} + 2\sqrt{a}} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{(u_n + \sqrt{a})^2} = v_n^2.$$

Par récurrence, on montre alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0^{2^n}$ . Notons que  $|v_0| < 1$  donc  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

4. Si  $u_0 > \sqrt{a}$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > \sqrt{a}$ . On a donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{|u_n - \sqrt{a}|}{v_0^{2^n}} = \frac{u_n - \sqrt{a}}{v_n} = u_n + \sqrt{a} \leq u_0 + \sqrt{a} \leq 2u_0$$

puisque la suite  $(u_n)$  est décroissante, et  $u_0 > \sqrt{a}$ .

On a donc montré que  $|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0 v_0^{2^n}$ .

### Exercice 23.

Montrer que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

**Solution :** Notons  $a = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$  et  $b = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$ .

Analyse (non nécessaire ici) : Admettons que ces expressions aient un sens. Alors  $a^2 = a + 1$ , et  $1 + \frac{1}{b} = b$ , ce qui donne puisque  $b \neq 0$ , que  $b^2 = b + 1$ . Résolvons l'équation  $x^2 - x - 1 = 0$ . On calcule  $\Delta = 1 + 4 = 5$ , donc cette équation a deux solutions réelles qui sont  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Or  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ , donc si  $a$  et  $b$  existent, alors  $a = b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . On note  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Synthèse : Prouvons désormais que  $a$  et  $b$  ont bien un sens. On définit les suites par récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $v_{n+1} = g(v_n)$  avec  $u_0 = 1$ ,  $v_0 = 1$ ,  $f(x) = \sqrt{1+x}$ , et  $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ . Puisque  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , alors  $\mathbb{R}_+$  est stable. De plus, sur cet intervalle,  $f(x) - x \geq 0 \iff x \leq \varphi$ , et puisque  $\varphi$  est un point fixe de  $f$ , alors  $[1, \varphi]$  est stable par  $f$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée et converge vers un point fixe de  $f$  dans cet intervalle, à savoir  $\varphi$ . Donc  $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  existe et l'on vient de remonter que  $a = \varphi$ .

On montre pour  $g$  que  $g \circ g$  est une fonction qui stabilise les intervalles  $[0, \varphi[$  et  $] \varphi, +\infty[$ , et telle que  $g \circ g(x) - x \geq 0 \iff x \leq \phi$ . Par conséquent, les suites  $(v_{2n})$  et  $(v_{2n+1})$  sont monotones, l'une croissante et majorée, l'autre décroissante et minorée. Elles convergent donc chacune vers un point fixe de  $g \circ g$ , qui ne peut être que  $\varphi$ . Ainsi,  $b = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \varphi$ .

**Exercice 24.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n$  la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \sum_{i=1}^n a_i x^i \end{array} .$$

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $x_n \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .
2. Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
3. En déduire qu'elle converge.

**Solution :**

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  est dérivable, et  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) = -\sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$ . Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, a_n > 0$ , alors  $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) < 0$ , et donc  $f_n$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Puisque  $f_n(0) = 1$  et  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ , alors  $f_n$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  dans  $] -\infty, 1]$ . Donc il existe un unique  $x_n \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .
2. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}_+, f_{n+1}(x) = f_n(x) - a_{n+1}x^{n+1} \leq 0$ . Donc  $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1})$ . De plus,  $f_n$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  et donc  $f_n(x_{n+1}) \leq 0 = f_n(x_n) \implies x_{n+1} \leq x_n$ . La suite  $(x_n)$  est donc décroissante.
3. Cette suite est décroissante et minorée par 0, donc elle converge.

**Exercice 25.**

Soit  $n$  un entier naturel et  $E_n$  l'équation  $x + \tan x = n$  d'inconnue  $x \in ] -\pi/2, \pi/2[$ .

1. Montrer que l'équation  $E_n$  possède une solution unique notée  $x_n$ .
2. Montrer que la suite  $(x_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Solution :**

1. Posons  $f(x) = x + \tan x$  pour tout  $x \in I = ] -\pi/2, \pi/2[$ . Cette fonction est dérivable sur cet intervalle et  $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ . Puisque  $f'(x) > 0$  sur l'intervalle  $I$  et que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\pi/2} -\infty$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} +\infty$  par somme de limites,  $f$  réalise donc une bijection de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Ainsi pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $E_n : f(x) = n$  admet une unique solution.
2. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) = n + 1 > n = f(x_n)$ . Puisque  $f$  est croissante, c'est que  $x_{n+1} > x_n$ . Ainsi la suite  $(x_n)$  est croissante, et majorée puisque évoluant dans l'intervalle  $I$ . Par conséquent, elle converge vers  $\ell \in ] -\pi/2, \pi/2[$ . Or si  $\ell \in ] -\pi/2, \pi/2[$ , par continuité de la fonction  $f, f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$ , ce qui est absurde puisque  $f(x_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . C'est donc que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi/2$ .

**Exercice 26.**

Soient  $I$  un intervalle et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

- l'équation  $f_n(x) = 0$  d'inconnue  $x \in I$  admet une unique solution  $x_n$  ;
- la fonction  $f_n$  est strictement croissante sur  $I$  ;
- pour tout  $x \in I, f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ .

1. Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Démontrer rigoureusement cette conjecture.
3. Application : considérer la suite des fonctions  $f_n$  définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f_n(x) = x^n \ln(x) - 1$ .

**Solution :**

2. Montrons que la suite  $(x_n)$  est décroissante. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On sait d'une part que  $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ . De plus,  $f_n(x_{n+1}) \leq f_{n+1}(x_{n+1})$ , par hypothèse, donc  $f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n)$ . Puisque  $f_n$  est strictement croissante sur  $I$ , c'est donc que  $x_{n+1} \leq x_n$ . Donc la suite  $(x_n)$  est décroissante.
3. On pose donc  $f_n(x) = x^n \ln(x) - 1$ , pour tout  $x > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , c'est une fonction dérivable et  $f'_n(x) = nx^{n-1} \ln(x) + x^{n-1} = x^{n-1}(1 + n \ln(x))$ . En particulier, cette quantité est du signe de  $1 + n \ln(x)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Or  $1 + n \ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq \frac{-1}{n} \iff x \geq e^{-1/n}$  car la fonction exponentielle est croissante. On cherche un intervalle  $I$  sur lequel toutes les fonctions  $f_n$  sont strictement croissantes. Puisque  $e^{-1/n} < 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors l'intervalle  $I = [1, +\infty[$  convient. De plus,  $f_n(1) = -1$  et  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  donc  $f_n$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  dans  $] -1, +\infty[$  et en particulier l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution dans  $I = [1, +\infty[$ .  
De plus, sur cet intervalle,  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} \ln(x) - 1 - x^n \ln(x) + 1 = x^{n-1} \ln(x)(x - 1) \geq 0$ , donc  $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$  pour tout  $x \in I$ . D'après la question 2, on sait alors que la suite  $(x_n)$  des solutions de  $f_n(x) = 0$  existe et est décroissante. De plus, puisque  $I$  est minoré, elle est convergente.

**Exercice 27.**

Montrer que l'équation  $xe^x = n$  possède pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une unique solution  $x_n$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Étudier la convergence de la suite  $(x_n)$ .

**Solution :** On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ . Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $f(x) > 0$ . De plus,  $f(0) = 0$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , et donc  $f$  réalise une bijection de l'intervalle  $[0, +\infty[$  dans  $[0, +\infty[$ . Ainsi pour tout  $b \in \mathbb{N}$ , l'équation  $f(x) = n$  possède une unique solution dans  $[0, +\infty[$ .

On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$ . Puisque  $f$  est croissante, c'est que  $x_{n+1} > x_n$ . Ainsi la suite  $(x_n)$  est croissante. Ainsi soit elle converge vers  $\ell \in \mathbb{R}_+$ , soit elle diverge vers  $+\infty$ . Or si  $\ell \in \mathbb{R}_+$ , par continuité de la fonction  $f$ ,  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$ , ce qui est absurde puisque  $f(x_n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . C'est donc que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .