

---

Feuille d'exercices n° 10

POLYNÔMES

---

**Exercice 1.** Quelles sont les racines (dans  $\mathbf{C}$ , dans  $\mathbf{R}$  et dans  $\mathbf{Q}$ ) des polynômes suivants ?

- a)  $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ ,      b)  $X^n - 1$ , où  $n$  est un entier,      c)  $X^6 - 4$ ,  
d)  $X^4 - 13X^2 + 36$ ,      e)  $X^4 + 6X^2 + 25$ .

**Solution :**

- a)  $X^3 - 7X^2 + 14X - 8 = (X - 1)(X - 2)(X - 4)$ . Donc ses racines dans  $\mathbf{C}$ , dans  $\mathbf{R}$  ou dans  $\mathbf{Q}$  sont 1, 2, 4.
- b) Pour tout entier  $n \geq 1$ , les racines complexes du  $X^n - 1$  sont  $X = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$  avec  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .  
Si  $n \in \mathbf{N}^*$  est impaire, les racines réelles/rationnelles sont  $X = 1$ ; si  $n \in \mathbf{N}^*$  est paire, les racines réelles/rationnelles sont  $X = \pm 1$ . Si  $n = 0$ ,  $X^n - 1 \equiv 0$ .
- c)  $X^6 - 4 = (X^3 - 2)(X^3 + 2)$ . Donc ses racines complexes sont  $\pm\sqrt[3]{2}$ ,  $\pm\sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et  $\pm\sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$ . Ses racines réelles sont  $\pm\sqrt[3]{2}$ . Il n'y a pas de racines dans  $\mathbf{Q}$ .
- d) On a  $X^4 - 13X^2 + 36 = (X^2 - 4)(X^2 - 9)$ . Donc ses racines complexes/réelles/rationnelles sont  $\pm 2$  et  $\pm 3$ .
- e) On a  $X^4 + 6X^2 + 25 = (X^2 + 3)^2 + 16 = (X^2 + 3 + 4i)(X^2 + 3 - 4i)$ . Les racines complexes de  $X^2 + 3 + 4i$  sont  $\pm(1 - 2i)$  et les racines complexes de  $X^2 + 3 - 4i$  sont  $\pm(1 + 2i)$ . Donc les racines complexes de  $X^4 + 6X^2 + 25$  sont  $\pm(1 - 2i)$  et  $\pm(1 + 2i)$ . Il n'existe pas de racine réelle.

□

**Exercice 2.** Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes qui le divisent dans l'anneau de polynômes précisé :

- a)  $X + 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ ,      b)  $X^2 - 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ ,  
c)  $X^2 + 1$  dans  $\mathbf{C}[X]$ ,      d)  $X^2 + 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ .

**Solution :**

- a) Dans  $\mathbf{R}[X]$ , pour tout  $a \in \mathbf{R}^*$ ,  $a$  et  $aX + a$  divisent  $X + 1$ .
- b) Dans  $\mathbf{R}[X]$ , pour tout  $a \in \mathbf{R}^*$ ,  $a$ ,  $aX + a$ ,  $aX - a$  et  $aX^2 - a$  divisent  $X^2 - 1$ .
- c) Dans  $\mathbf{C}[X]$ , pour tout  $a \in \mathbf{C}^*$ ,  $a$ ,  $a(X + i)$ ,  $a(X - i)$  et  $a(X^2 + 1)$  divisent  $X^2 + 1$ .
- d) Dans  $\mathbf{R}[X]$ , pour tout  $a \in \mathbf{R}^*$ ,  $a$  et  $a(X^2 + 1)$  divisent  $X^2 + 1$ .

□

### Exercice 3.

1. Soit  $P$  un polynôme à coefficients réels. Montrer que, pour tout  $a \in \mathbf{C}$ , on a  $\overline{P(a)} = P(\bar{a})$ .
2. Soit  $P, Q$  deux polynômes à coefficients complexes tels que  $P(x) = Q(x)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $P = Q$ .
3. Soit  $P \in \mathbf{C}[X]$  tel que  $P(x) \in \mathbf{R}$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Montrer que  $P \in \mathbf{R}[X]$ .

#### Solution :

1. On pose  $P(X) = \sum_{k=0}^n c_k X^k$  avec  $n \in \mathbf{N}$  et  $c_k \in \mathbf{R}, \forall k = 0, \dots, n$ . Soit  $a \in \mathbf{C}$ . Alors

$$\overline{P(a)} = \overline{\sum_{k=0}^n c_k a^k} = \sum_{k=0}^n \overline{c_k} \cdot \overline{a^k} = \sum_{k=0}^n c_k (\bar{a})^k = P(\bar{a}).$$

2. On pose  $R = P - Q$ . Alors  $R$  est un polynôme dans  $\mathbf{C}[X]$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $R(x) = P(x) - Q(x) = 0$ . Ceci implique que  $R$  possède une infinité de racines dans  $\mathbf{C}$ . On en déduit que  $R$  est la fonction nulle. Autrement dit,  $P = Q$ .
3. Disons que  $P$  est de degré  $n$ . Si  $n = 0$ ,  $P(X)$  est une fonction constante et  $P(X) = P(0) \in \mathbf{R}$ . Donc  $P \in \mathbf{R}[X]$ . Si  $n \in \mathbf{N}^*$ , on prend  $n + 1$  réels distincts  $a_1, \dots, a_{n+1}$  et on pose

$$Q(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[ \prod_{j \neq k, 1 \leq j \leq n+1} (X - a_j) \right] \frac{P(a_k)}{\prod_{j \neq k, 1 \leq j \leq n+1} (a_k - a_j)}.$$

Notons que  $Q \in \mathbf{R}[X]$  car  $P(a_k) \in \mathbf{R}$  pour  $\forall k \in \{1, \dots, n+1\}$ . Le degré de  $Q$  est au maximum  $n$ . En effet, on peut montrer que  $P = Q$ . Observons que

$$Q(a_k) = P(a_k), \forall k = 1, \dots, n+1.$$

Ceci implique que  $P - Q$  est un polynôme de  $\mathbf{C}[X]$ , de degré  $\leq n$ , ayant  $n + 1$  racines complexes. Donc, on a  $P - Q \equiv 0$ . Autrement dit,  $P = Q \in \mathbf{R}[X]$ . □

**Exercice 4.** Développer  $P = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1) \in \mathbf{R}[X]$ . En déduire une preuve que 100011 n'est pas un nombre premier.

**Solution :** On a  $P(X) = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1) = X^5 + X + 1$ . Donc  $100011 = P(10) = (10^3 - 10^2 + 1) \times (10^2 + 10 + 1) = 901 \times 111$ . Donc 100011 n'est pas un nombre premier. □

**Exercice 5.** Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbf{R}[X]$ , et soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts. Soient  $\lambda$  (respectivement,  $\mu$ ) le reste de la division euclidienne de  $P(X)$  par  $X - a$  (respectivement, par  $X - b$ ). Calculer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ . Commenter le cas  $\lambda = \mu = 0$ .

**Solution :** Il existent  $Q_1$  et  $Q_2$  dans  $\mathbf{R}[X]$  tels que

$$\begin{cases} P(X) = Q_1(X)(X - a) + \lambda; \\ P(X) = Q_2(X)(X - b) + \mu. \end{cases}$$

D'où,  $Q_1(X)(X - a) - Q_2(X)(X - b) = \mu - \lambda$ . Puisque  $a \neq b$ ,  $X - a$  et  $X - b$  sont premiers entre eux et on a

$$\frac{\mu - \lambda}{b - a}(X - a) - \frac{\mu - \lambda}{b - a}(X - b) = \mu - \lambda.$$

On en déduit que

$$\left[ Q_1(X) - \frac{\mu - \lambda}{b - a} \right] (X - a) - \left[ Q_2(X) - \frac{\mu - \lambda}{b - a} \right] (X - b) = 0.$$

Donc,  $X - b$  divise  $\left[ Q_1(X) - \frac{\mu - \lambda}{b - a} \right] (X - a)$ . Ensuite, on a  $X - b$  divise  $\left[ Q_1(X) - \frac{\mu - \lambda}{b - a} \right]$ . On obtient alors que

$$Q_1(X) = R(X)(X - b) + \frac{\mu - \lambda}{b - a} \text{ avec certain } R(X) \in \mathbf{R}[X].$$

Ainsi, on a  $Q_2(X) = R(X)(X - a) + \frac{\mu - \lambda}{b - a}$  et

$$P(X) = \left[ R(X)(X - b) + \frac{\mu - \lambda}{b - a} \right] (X - a) + \lambda = R(X)(X - b)(X - a) + \frac{\mu - \lambda}{b - a}X + \frac{b\lambda - a\mu}{b - a}.$$

On en déduit que le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  est  $\frac{\mu - \lambda}{b - a}X + \frac{b\lambda - a\mu}{b - a}$ . En particulier, si  $\lambda = \mu = 0$ ,  $P$  est divisible par  $(X - a)(X - b)$ . □

**Exercice 6.** Établir les identités, pour  $n \in \mathbf{N}^*$

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1),$$

$$X^{2n+1} + 1 = (X + 1)(X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} - \dots + (-1)^p X^p \dots - X + 1).$$

En déduire les résultats suivants

1. Si le nombre de Mersenne  $M_n = 2^n - 1$  est premier, alors  $n$  est premier.
2. Si le nombre de Fermat  $F_n = 2^n + 1$  est premier, alors  $n$  est soit nul, soit une puissance de 2.

**Solution :** Notons que

$$X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \begin{cases} \frac{1-X^n}{1-X}, & \text{si } X \neq 1; \\ n, & \text{si } X = 1. \end{cases}$$

On en déduit que

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1), \forall X \in \mathbf{C}.$$

Similairement, on peut montrer que  $X^{2n+1} + 1 = (X + 1)(X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} - \dots + (-1)^p X^p \dots - X + 1)$ .

1. Soit  $n \in \mathbf{N}^*$  tel que  $M_n = 2^n - 1$  est premier. Supposons que  $n$  n'est pas premier. Alors il existent des entiers positifs  $m, k \in \mathbf{N}^*$  tels que  $n = mk$ . On voit que

$$\begin{aligned} M_n &= (2 - 1) \times (2^{n-1} + \dots + 2 + 1) \\ &= (2^{mk-1} + \dots + 2^{mk-k}) + (2^{mk-k-1} + \dots + 2^{mk-2k}) + \dots + (2^{k-1} + \dots + 2 + 1) \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} 2^{kj} \times (2^{k-1} + \dots + 2 + 1) \end{aligned}$$

Donc,  $2^{k-1} + \dots + 2 + 1$  divise  $M_n$ . C'est une contradiction. Par l'absurde, on conclut que si  $M_n$  est premier alors  $n$  est premier.

2. Soit  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $F_n = 2^n + 1$  est premier. Supposons que  $n \neq 0$  et  $n$  n'est pas une puissance de 2. Alors, on a

$$n = 2^k(2m + 1) \text{ avec } (k, m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*.$$

Observons que  $2^{2^k} + 1 \neq F_n$  car  $m \geq 1$ . Or, on voit que  $F_n = (2^{2^k})^{2m+1} + 1$  qui est divisible par  $2^{2^k} + 1$ . C'est une contradiction. Par l'absurde, on conclut que  $n$  soit nul, soit une puissance de 2.

□

**Exercice 7.** Pour quels entiers  $n$  le polynôme  $X^{2n} + X^n + 1$  est-il divisible par  $X^2 + X + 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$  ?

**Solution :** Observons que si  $n = 1$ ,  $X^2 + X + 1$  divise  $X^{2n} + X^n + 1$ . Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Par l'ex 6, on voit que

$$X^3 - 1 \text{ divise } X^{3n} - 1.$$

Notons que

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1),$$

et que

$$X^{3n} - 1 = (X^n - 1)(X^{2n} + X^n + 1) = (X - 1)(X^{n-1} + \dots + 1)(X^{2n} + X^n + 1).$$

Puisque  $X - 1$  et  $X^2 + X + 1$  sont premiers entre eux, on obtient que  $X^2 + X + 1$  divise  $(X^{n-1} + \dots + 1)(X^{2n} + X^n + 1)$ . Dans  $\mathbf{R}[X]$ ,  $X^2 + X + 1$  est premier. Donc soit  $X^2 + X + 1$  divise  $(X^{n-1} + \dots + 1)$  soit  $X^2 + X + 1$  divise  $X^{2n} + X^n + 1$ . Notons de plus que  $(X^{n-1} + \dots + 1)$  et  $(X^{2n} + X^n + 1)$  sont premiers entre eux car  $X^n - 1$  et  $X^{2n} + X^n + 1$  sont premiers entre eux. Donc,

soit  $X^2 + X + 1$  divise  $X^{n-1} + \dots + 1$  et  $X^2 + X + 1$  ne divise pas  $X^{2n} + X^n + 1$ ;

soit  $X^2 + X + 1$  divise  $X^{2n} + X^n + 1$  et  $X^2 + X + 1$  ne divise pas  $X^{n-1} + \dots + 1$ .

Observons que pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on a  $n = 3k + r$  avec  $k \in \mathbf{N}$  et  $r \in \{0, 1, 2\}$ . Alors, le reste de la division de  $X^{n-1} + \dots + 1$  par  $X^2 + X + 1$  est  $X^{r-1} + \dots + 1$  si  $r \geq 1$  et 0 si  $r = 0$  car

$$X^{n-1} + \dots + 1 = (X^{n-1} + X^{n-2} + X^{n-3}) + \dots + (X^{n-3k+2} + X^{n-3k+1} + X^{n-3k}) + X^{r-1} + \dots + 1.$$

C'est-à-dire,  $X^2 + X + 1$  divise  $(X^{n-1} + \dots + 1)$  si et seulement si  $3|n$  et  $n \geq 3$ . Réciproquement, si et seulement si  $n \in \mathbf{N}^*$  et 3 ne divise pas  $n$ ,  $X^2 + X + 1$  divise  $X^{2n} + X^n + 1$ .

□

**Exercice 8.** Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles

1.  $X^n + X^{n-1} + \dots + 1$  dans  $\mathbf{C}[X]$ ,
2.  $X^{11} + 2^{11}$  dans  $\mathbf{C}[X]$  puis dans  $\mathbf{R}[X]$ ,
3.  $X^4 + 4$  dans  $\mathbf{C}[X]$  puis dans  $\mathbf{R}[X]$ , et enfin dans  $\mathbf{Q}[X]$ ,
4.  $X^4 - j$  dans  $\mathbf{C}[X]$ , où  $j = \exp(2i\pi/3)$ .
5.  $X^8 + X^4 + 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ .
6.  $X^5 - 1$  dans  $\mathbf{R}[X]$ .

**Solution :**

1. Notons que  $(X^{n+1} - 1) = (X - 1)(X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1)$ . On sait que les racines complexes de  $X^{n+1} - 1$  sont  $e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$  avec  $k = 0, 1, \dots, n$ . Donc,

$$X^{n+1} - 1 = (X - 1) \times \prod_{k=1}^n (X - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}).$$

On en déduit que

$$X^n + X^{n-1} + \dots + 1 = \prod_{k=1}^n (X - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}).$$

2. Notons que les racines complexes de  $X^{11} + 2^{11}$  sont  $(-2)e^{i\frac{2k\pi}{11}}$  où  $k = 0, \dots, 10$ . Donc, dans  $\mathbf{C}[X]$ ,

$$X^{11} + 2^{11} = \prod_{k=0}^{10} (X + 2e^{i\frac{2k\pi}{11}})$$

De plus, les racines  $(-2)e^{i\frac{2k\pi}{11}}$  et  $(-2)e^{i\frac{2(11-k)\pi}{11}}$  sont conjuguées. En conséquence,

$$\begin{aligned} X^{11} + 2^{11} &= \prod_{k=0}^{10} (X + 2e^{i\frac{2k\pi}{11}}) = (X + 2) \prod_{k=1}^5 [(X + 2e^{i\frac{2k\pi}{11}})(X + 2e^{i\frac{2(11-k)\pi}{11}})] \\ &= (X + 2) \prod_{k=1}^5 (X^2 + 4 \cos(\frac{2k\pi}{11})X + 4), \end{aligned}$$

dans  $\mathbf{R}[X]$ .

3. Les racines complexes de  $X^4 + 4$  sont  $\sqrt{2}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$  où  $k = 0, 1, 2, 3$ . Donc, dans  $\mathbf{C}[X]$ ,

$$X^4 + 4 = (X - \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{4}})(X - \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})(X - \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}})(X - \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}).$$

Dans  $\mathbf{R}[X]$  (ou dans  $\mathbf{Q}[X]$ ), on a

$$X^4 + 4 = X^4 + 4X^2 + 4 - 4X^2 = (X^2 + 2)^2 - (2X)^2 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).$$

4. Les racines complexes de  $X^4 - j$  sont  $e^{i\frac{(3k+1)\pi}{6}}$  où  $k = 0, 1, 2, 3$ . Dans  $\mathbf{C}[X]$ ,

$$X^4 - j = (X - e^{i\frac{\pi}{6}})(X - e^{i\frac{4\pi}{6}})(X - e^{i\frac{7\pi}{6}})(X - e^{i\frac{11\pi}{6}})$$

5. Observons que

$$\begin{aligned} X^8 + X^4 + 1 &= X^8 + 2X^4 + 1 - X^4 \\ &= (X^4 + 1)^2 - X^4 = (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1) \\ &= (X^4 + 2X^2 + 1 - X^2)(X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2) \\ &= [(X^2 + 1)^2 - X^2][(X^2 + 1)^2 - 3X^2] \\ &= (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1) \end{aligned}$$

6. Notons que les racines complexes de  $X^5 - 1$  sont  $X = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$  avec  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Donc,

$$\begin{aligned} X^5 - 1 &= (X - 1)(X - e^{i\frac{2\pi}{5}})(X - e^{i\frac{4\pi}{5}})(X - e^{i\frac{6\pi}{5}})(X - e^{i\frac{8\pi}{5}}) \\ &= (X - 1)[(X - e^{i\frac{2\pi}{5}})(X - e^{i\frac{8\pi}{5}})] \times [(X - e^{i\frac{4\pi}{5}})(X - e^{i\frac{6\pi}{5}})] \\ &= (X - 1)[(X - e^{i\frac{2\pi}{5}})(X - e^{-i\frac{2\pi}{5}})] \times [(X - e^{i\frac{4\pi}{5}})(X - e^{-i\frac{4\pi}{5}})] \\ &= (X - 1)(X^2 - 2 \cos(\frac{2\pi}{5})X + 1)(X^2 - 2 \cos(\frac{4\pi}{5})X + 1) \end{aligned}$$

□

**Exercice 9.** Soit  $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$ .

1. Vérifier que  $i$  est racine de  $P$ .
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de  $P$  sur  $\mathbf{R}[X]$  et sur  $\mathbf{C}[X]$ .

**Solution :**

1. On calcule :  $P(i) = (-i)^2 + 1 = 0$ .
2. Puisque  $P \in \mathbf{R}[X]$  on a aussi  $-i$  qui est racine. Donc  $X^2 + 1 | P$ . On effectue la division euclidienne :  $P = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$ . Puisque  $P$  n'a pas de racines réelles ( $P(x) \geq 1$  pour tout  $x$ ) on a la décomposition de  $P$  dans  $\mathbf{R}$ . Dans  $\mathbf{C}$ , on cherche les racines via le discriminant. On obtient  $P = (X - i)(X + i)(X - 1 + i)(X - 1 - i)$ .

□

**Exercice 10.** Soit  $a \in \mathbf{R}$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , et le polynôme  $P = (\cos a + X \sin a)^n \in \mathbf{R}[X]$ . Calculer le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X^2 + 1$ .

**Solution :**

On peut écrire ce reste sous la forme  $bX + c$ . On a alors

$$P = Q \cdot (X^2 + 1) + bX + c.$$

De là, on obtient  $P(i) = bi + c = \exp(ina)$  et  $P(i) = -bi + c = \exp(-ina)$ . On en déduit que  $b = \sin(na)$  et  $c = \cos(na)$ .

□

**Exercice 11.** On rappelle que  $j = e^{2i\pi/3}$ . Soit le polynôme  $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ .

1. Montrer que  $j$  est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Décomposer  $P$  en facteurs irréductibles dans  $\mathbf{C}[X]$  et dans  $\mathbf{R}[X]$  (on pourra utiliser judicieusement le fait que  $P$  est pair).

**Solution :**

1. On utilise la relation  $j^3 = 1$  pour obtenir

$$P(j) = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3j^2 + 3j + 3.$$

Or,  $j$  est racine de  $X^2 + X + 1$ , donc  $j^2 = -j - 1$ . On a donc

$$P(j) = 0.$$

On calcule maintenant la dérivée :

$$P' = 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X = 4X(2X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1).$$

On a alors

$$P'(j) = 4j(2 + 3j + 3j^2 + 1) = 4jP(j) = 0.$$

Ensuite, on calcule la dérivée seconde :

$$P'' = 4(2X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1) + 4X(12X^5 + 12X^3 + 6X).$$

On a donc

$$P''(j) = 24j^2(2j + 2j^2 + 1) = -24j^2 \neq 0.$$

Donc  $j$  est racine de  $P$  d'ordre de multiplicité 2.

2. Puisque  $P$  est pair, pour chacune de ses racines, comptées avec multiplicité, l'opposé est racine aussi.

Donc  $-j$  est racine de multiplicité 2.

D'autre part, puisque  $P$  est un polynôme réel, on a  $\bar{j}$  et  $-\bar{j}$  qui sont racines de multiplicité 2.

Finalement,

$$P = (X - j)^2(X + j)^2(X - \bar{j})^2(X + \bar{j})^2.$$

□

**Exercice 12.** Soit le polynôme  $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + aX^2 + 4X + 1 \in \mathbf{R}[X]$ . On suppose que  $-1$  est une racine de  $P$ .

1. Déterminer  $a$ .
2. Montrer que  $-1$  est racine double de  $P$ .
3. Montrer que  $j$  est racine multiple de  $P$ .
4. Factoriser  $P$  en facteurs irréductibles, d'abord dans  $\mathbf{C}[X]$  puis dans  $\mathbf{R}[X]$ .

**Solution :**

1.  $P(-1) = 1 - 4 + 8 - 10 + a - 4 + 1 = -8 + a$  donc  $P(-1) = 0 \Leftrightarrow a = 8$ .
2. Deux solutions : faire la division euclidienne de  $P$  par  $X + 1$  et voir si 1 est racine puis recommencer, ou calculer les dérivées.

$$P' = 6X^5 + 20X^4 + 32X^3 + 30X^2 + 16X + 4.$$

On a bien  $P'(-1) = 0$ . De plus,

$$P'' = 30X^4 + 80X^3 + 96X^2 + 60X + 16 \text{ et } P''(-1) = 2 \neq 0$$

donc  $-1$  est racine double de  $P$ .

3.  $P(j) = 1 + 4j^2 + 8j + 10 + 8j^2 + 4j + 1$  et en utilisant  $j^2 = -j - 1$  on obtient  $P(j) = 0$ .

On calcule

$$P'(j) = 2(3j^2 + 10j + 16 + 15j^2 + 8j + 2) = 36(j^2 + j + 1) = 0.$$

De même,

$$P''(j) = 30j + 80 + 96j^2 + 60j + 16 = -6j \neq 0$$

donc  $j$  est racine double de  $P$ .

4. Puisque  $P$  est à coefficients réels,  $j^2$  est racine double de  $P$  et on a alors

$$P = ((X + 1)(X - j)(X - j^2))^2.$$

Dans  $\mathbf{R}$  on a alors

$$P = ((X + 1)(X^2 + X + 1))^2.$$

□

**Exercice 13.** Soit  $\theta$  un réel, et  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que le reste de la division euclidienne dans  $\mathbf{C}[X]$  de  $X^n \sin(\theta) - X \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$  par  $X^2 - 2X \cos(\theta) + 1$  est nul. Qu'en est-il dans  $\mathbf{R}[X]$  ?

**Solution :** On écrit  $X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ , donc il s'agit de vérifier si

$$e^{in\theta} \sin(\theta) - e^{i\theta} \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta) = 0$$

et la même chose pour  $e^{-i\theta}$ . On écrit  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$  et on a

$$\begin{aligned} e^{in\theta} \sin(\theta) - e^{i\theta} \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta) &= \cos(n\theta) \sin(\theta) + i \sin(n\theta) \sin(\theta) \\ &\quad - \cos(\theta) \sin(n\theta) - i \sin(n\theta) \sin(\theta) + \sin((n-1)\theta) \\ &= \cos(n\theta) \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta) \\ &= -\sin((n-1)\theta) + \sin((n-1)\theta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Puisque  $P$  est à coefficients réels on a alors aussi  $e^{-i\theta}$  qui est racine de  $P$ . Le reste de la division euclidienne dans  $\mathbf{C}$  est donc 0, on peut écrire  $P = Q \cdot (X^2 - 2\cos(\theta)X + 1)$  avec  $Q \in \mathbf{C}[X]$ .

Supposons que le reste de la division euclidienne dans  $\mathbf{R}$  n'est pas 0. On a alors  $P = Q_1 \cdot (X^2 - 2\cos(\theta)X + 1) + aX + b$  pour un polynôme réel  $Q_1$  et des réels  $a$  et  $b$ . Cela donne alors, dans  $\mathbf{C}$ ,

$$Q_1 \cdot (X^2 - 2\cos(\theta)X + 1) + aX + b = Q \cdot (X^2 - 2\cos(\theta)X + 1)$$

et donc  $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 \mid aX + b$  donc  $a = b = 0$ .

□

**Exercice 14.**

1. Calculer le PGCD unitaire des polynômes  $2X^4 + X^2 + X + 1$  et de  $X^6 - X^5 + X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 3X + 1$ .
2. Montrer que les polynômes  $X^4 - 1$  et  $X^3 + 2X^2 - X - 1$  sont premiers entre eux, et établir une relation de Bézout entre eux.
3. Soient les polynômes complexes  $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$  et  $B = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$ . Calculer leur PGCD unitaire. En déduire une relation de Bézout entre  $A$  et  $B$ . Déterminer tous les couples de polynômes  $(U, V)$  vérifiant cette identité.
4. Reprendre la question 3. avec  $A = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1$  et  $B = X^3 - X^2 + 2X - 1$ .

**Exercice 15.** Soit  $n$  et  $m$  deux entiers. Calculer le PGCD unitaire des polynômes  $X^n - 1$  et  $X^m - 1$ .

**Exercice 16.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda, \mu$  pour que  $X^2 + 1$  divise  $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ .

**Solution :**

$$\begin{aligned} P \text{ divise } X^2 + 1 &\Leftrightarrow P \text{ divise } X - i \text{ et } X + i \Leftrightarrow i \text{ et } -i \text{ sont des racines de } P \Leftrightarrow P(i) = P(-i) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - i - \lambda + \mu i + 2 = 0 \\ 1 + i - \lambda - \mu i + 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 3, \mu = 2. \end{aligned}$$



**Exercice 17.** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X \cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

**Solution :**

On a  $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2k\pi}{n}}) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{-\frac{2k\pi}{n}})$  cela donne :

$$(X^n - 1)^2 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2k\pi}{n}}) \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{-\frac{2k\pi}{n}}) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2k\pi}{n}}) (X - e^{-\frac{2k\pi}{n}}) = \prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X \cos(2k\pi/n) + 1)$$

**Exercice 18.** Soit  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ , et soient  $z_1, \dots, z_n$  des nombres complexes (pas nécessairement distincts). On pose  $e_0 = 1$  et, pour  $k$  compris entre 1 et  $n$  :

$$e_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_k}.$$

Voici quelques valeurs des  $e_k$  :

$$\begin{aligned} e_0 &= 1, \\ e_1 &= z_1 + z_2 + \dots + z_n, \\ e_2 &= (z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_1 z_n) + (z_2 z_3 + \dots + z_2 z_n) + \dots + (z_{n-1} z_n), \\ &\vdots \\ e_{n-1} &= z_2 \dots z_n + z_1 z_3 \dots z_n + \dots + z_1 \dots z_{n-1}, \\ e_n &= z_1 z_2 \dots z_n. \end{aligned}$$

1. Pour  $n = 2$  (resp.  $n = 3$ ), écrire explicitement  $e_1, e_2$  (resp.  $e_1, e_2, e_3$ ) et montrer que

$$(X - z_1)(X - z_2) = X^2 - e_1 X + e_2 \quad (\text{resp. } (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - e_1 X^2 + e_2 X - e_3).$$

2. Pour  $n$  quelconque, montrer que l'on a :

$$\prod_{j=1}^n (X - z_j) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e_k X^{n-k}.$$

3. Sachant que  $2i$  et  $3 - i$  sont des racines de  $X^3 + (i+1)X^2 - (8+4i)X - 4 + 28i$ , calculer la troisième racine complexe de ce polynôme.

4. Pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 2$ , déterminer sans calcul  $\sum_{1 \leq j \leq n} e^{2\pi i j/n}$  et  $\sum_{1 \leq j < k \leq n} e^{2\pi i(j+k)/n}$ .

**Solution :**

1.  $n = 2$  :

$$e_0 = 1, e_1 = z_1 + z_2, e_2 = z_1 z_2.$$

$$\text{Donc } (X - z_1)(X - z_2) = X^2 - X(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = X^2 - e_1 X + e_2.$$

$n = 3$  :

$$e_0 = 1, e_1 = z_1 + z_2 + z_3, e_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3, e_3 = z_1 z_2 z_3.$$

$$\text{Donc } (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - (z_1 + z_2 + z_3)X^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)X - z_1 z_2 z_3 =$$

$$X^3 - e_1X^2 + e_2X - e_3.$$

2. On demontre le resultat par recurrence :

Initialisation : pour  $n = 2$ , le resultat est vrai.

Heridite : on suppose que  $(P_n)$  est vraie et on demontre que  $P_{n+1}$  l'est aussi,

Soient  $\{e_k, k \in \{0, \dots, n\}\}$  comme precedement definis et :

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, \\ d_1 &= z_1 + z_2 + \dots + z_{n+1}, \\ d_2 &= (z_1z_2 + z_1z_3 + \dots + z_1z_{n+1}) + (z_2z_3 + \dots + z_2z_{n+1}) + \dots + (z_nz_{n+1}), \\ &\vdots \\ d_n &= z_2 \dots z_{n+1} + z_1z_3 \dots z_{n+1} + \dots + z_1 \dots z_n, \\ d_{n+1} &= z_1z_2 \dots z_{n+1}. \end{aligned}$$

Le but est de montrer que :

$$\prod_{j=1}^{n+1} (X - z_j) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k d_k X^{n+1-k}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{n+1} (X - z_j) &= (X - z_{n+1}) \prod_{j=1}^n (X - z_j) \\ &= (X - z_{n+1}) \sum_{k=0}^n (-1)^k e_k X^{n-k} \quad (P_n) \\ &= \sum_{k=0}^n z_{n+1} (-1)^{k+1} e_k X^{n-k} + \sum_{k=0}^n (-1)^k e_k X^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} z_{n+1} (-1)^k e_{k-1} X^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n (-1)^k e_k X^{n+1-k} \\ &= (-1)^{n+1} z_{n+1} e_n + \sum_{k=1}^n z_{n+1} (-1)^k e_{k-1} X^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n (-1)^k e_k X^{n+1-k} + e_0 X^{n+1} \\ &= d_0 X^{n+1} + \sum_{k=1}^n z_{n+1} \left( (-1)^k e_{k-1} + (-1)^k e_k \right) X^{n+1-k} + (-1)^{n+1} d_{n+1} \quad \text{car } z_{n+1} e_n = d_{n+1}, e_0 = d_0 \\ &= d_0 X^{n+1} + \sum_{k=1}^n z_{n+1} ((-1)^k d_k) X^{n+1-k} + (-1)^{n+1} d_{n+1} \quad \text{car } e_{k-1} + e_k = d_k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k d_k X^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \prod_{j=1}^n (X - z_j) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e_k X^{n+1-k}.$

3. D'apres la question 2., si on note  $z$  la troisieme racine de  $X^3 + (i+1)X^2 - (8+4i)X - 4 + 28i$  on a :  
 $(2i) + (3-i) + z_3 = e_1 = -i - 1$  donc :  $z_3 = -4 - 2i$ .

4. Si  $n \geq 2$ , les  $e^{i\frac{2\pi j}{n}}, j \in \{1, \dots, n\}$  sont les racines du polynome  $X^n - 1$  donc :  $\sum_{1 \leq j \leq n} e^{2\pi i j/n} = e_1 = 0$

On a :  $e^{2\pi i(j+k)/n} = e^{i\frac{2\pi j}{n}} e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ , donc, Idem :  $\sum_{1 \leq j < k \leq n} e^{2\pi i(j+k)/n} = e_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 3. \\ -1 & \text{si } n = 2. \end{cases}$

**Exercice 19.** Soit  $P(X) = X^4 + 12X - 5$ . Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans  $\mathbf{R}[X]$ , en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2. **Solution :**

On suppose que  $a, b$  sont les racines tels que :  $a + b = 2$ . Soient maintenant  $c, d$  les deux autres racines de ce polynome.

D'après l'exercice 18. on a  $0 = e_1 = a + b + c + d$  et donc  $c + d = -2$ .

Puisque :  $P = ((X - a)(X - b))((X - c)(X - d)) = (X^2 - 2X + ab)(X^2 + 2X + cd) = X^4 + (-4 + ab + cd)X^2 + (2ab - 2cd)X + (ab)(cd)$  on a :

$$\begin{cases} a + b = 2. \\ c + d = -2 \\ ab + cd = 4 \\ ab - cd = 6 \\ (ab)(cd) = -5. \end{cases} \implies \begin{cases} a + b = 2. \\ ab = 5 \\ c + d = -2 \\ cd = -1. \end{cases} \implies \begin{cases} (a, b) \in (1 + 2i, 1 - 2i) \\ (c, d) \in (-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}). \end{cases}$$

La decomposition dans  $\mathbf{C}[X]$  est donnée par :

$$P = (X + 1 - \sqrt{2})(X + 1 + \sqrt{2})(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i)$$

La decomposition dans  $\mathbf{R}[X]$  est donnée par :

$$P = (X + 1 - \sqrt{2})(X + 1 + \sqrt{2})(X^2 - 2X + 5).$$

**Exercice 20.** Quels sont les polynômes  $P \in \mathbf{C}[X]$  tels que  $P'$  divise  $P$ ? **Solution :**

$P \in \mathbf{C}[X]$ , on suppose que  $P'|P$  et que  $P \neq 0$

Si  $\deg(P) = 0$  alors  $P' = 0$  ce qui est exclu. Par conséquent  $\deg(P) \geq 1$ .

Alors  $\exists Q \in \mathbf{C}[X]$  tel que  $P = QP'$ , or  $\deg(P) = \deg(P') + \deg(Q) \implies \deg(Q) = 1$ .

Soit  $r$  une racine de  $P$ , comme  $P = QP'$  on a :

$$\text{multiplicite de } r \text{ pour } P = \text{multiplicite de } r \text{ pour } P' + \text{multiplicite de } r \text{ pour } Q$$

Or par definition, on a :

$$\text{multiplicite de } r \text{ pour } P = \text{multiplicite de } r \text{ pour } P' + 1$$

Donc  $r$  est une racine de  $Q$ , comme  $Q$  est de la forme  $x \mapsto ax + b, a \neq 0$  alors il admet une seule racine qui est  $r$ , cela implique que  $P$  admet une seule racine, cette racine est de multiplicite  $\deg(P)$ .

En consequence,  $\exists c \in \mathbf{C}^*, r \in \mathbf{C}$  tel que :  $P = c(X - r)^{\deg(P)}$ . Réciproquement, on peut vérifier que les polynomes de cette forme satisfont :  $P'|P$ .

**Exercice 21.**

1. Factoriser le polynôme  $X^2 - X + 1$  dans  $\mathbf{C}[X]$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que  $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est divisible par  $X^2 - X + 1$ .

**Solution :**

1. On a  $X^2 - X + 1 = (X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})$

2.  $n \in \mathbf{N}$ , on a :  $X^2 - X + 1 | (X - 1)^{n+2} + X^{2n+1} \Leftrightarrow (X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}}) | (X - 1)^{n+2} + X^{2n+1} \Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $e^{-i\frac{\pi}{3}}$  sont des racines de  $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ .

Or,  $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = e^{i\frac{\pi}{6}}(e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}) = e^{i\frac{\pi}{6}}(2i\sin(\frac{\pi}{6})) = e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Alors,

$$(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)^{n+2} + (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2n+1} = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^{n+2} + (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2n+1} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2n+4} + (e^{i\frac{2\pi}{3}})^{2n+1} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2n+1} \left( (e^{i\frac{\pi}{3}})^3 + 1 \right) = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{2n+1} (e^{i\pi} + 1) = 0$$

Le polynôme  $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est dans  $\mathbf{R}[X]$  et donc il admet  $e^{-i\frac{\pi}{3}}$  comme racine, par conséquent  $X^2 - X + 1 | (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ .

**Exercice 22.** Soit  $P \in \mathbf{C}[X]$  défini par  $P(X) = X^3 + 3X^2 + 2X + i$ .

1. Déterminer les racines du polynôme dérivé  $P'$ .
2. Montrer que  $P$  n'admet aucune racine réelle.
3. Dédire des questions précédentes que  $P$  admet 3 racines distinctes dans  $\mathbf{C}$ , notées  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .
4. Calculer  $\alpha + \beta + \gamma$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$  et  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ .

**Solution :**

1.  $P' = 3X^2 + 6X + 2$  donc les racines de  $P'$  sont :  $x_1 = -2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  et  $x_2 = -2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

2. On a :  $P(X) = 0 \Leftrightarrow -i = -(X^3 + 3X^2 + 2X)$  qui ne peut jamais être vraie si  $X \in \mathbf{R}$ .

3.  $P$  n'admet aucune racine réelle, donc toutes ces racines sont complexes, comme la dérivée de  $P$  n'admet aucune racine complexe, alors  $P$  n'admet aucune racine de multiplicité  $\geq 2$ . Enfin,  $P$  admet 3 racines complexes (non réelles) distinctes.

4. Supposons que  $a, b$  et  $c$  sont les racines de  $P$ , d'après l'exercice 18. on a :

$$\begin{cases} a + b + c = (-1)^1 e_1 = -3 \\ ab + ac + bc = (-1)^2 e_2 = 2 \\ abc = (-1)^3 e_3 = -i \end{cases}$$

Cela implique que :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = (-3)^2 - 2(2) = 5.$$

Et,

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(ab + ac + bc)(a + b + c) + 3abc = -27 - 3(2)(-3) + 3(-i) = -9 - 3i.$$

**Exercice 23.** On note  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  et  $\alpha_5$  les racines complexes du polynôme  $P(X) = X^5 - 29X^4 + 117X^3 - 11X^2 + 4X + 1$ . Montrer que ces nombres sont différents de 0. Écrire le polynôme unitaire de degré 5 dont les racines sont  $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3, 1/\alpha_4$  et  $1/\alpha_5$ .

**Exercice 24.** Déterminer le PGCD unitaire de  $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$  et de  $X^4 - 1$ , considérés comme éléments de  $\mathbf{Q}[X]$ .

**Exercice 25.** Déterminer tous les polynômes de degré 3, divisibles par  $X - 1$ , et tels que les restes des divisions euclidiennes par  $X - 2$ , par  $X - 3$  et par  $X - 4$  soient égaux (mais certainement non nuls).

**Exercice 26.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ , et considérons le polynôme à coefficients réels  $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + c$ . Peut-on choisir  $a, b, c$  pour que  $P$  admette 1 comme racine multiple? Quel est alors l'ordre de cette racine?

**Exercice 27.** Factoriser  $X^6 + X^3 + 1$  sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de  $\mathbf{R}[X]$ .

**Exercice 28.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que les polynômes  $1 + X + \dots + \frac{X^n}{n!}$  et  $1 + X + X^n$  n'ont que des racines simples dans  $\mathbf{C}$ .

**Exercice 29.** Montrer que le polynôme  $P = X^{163} - 24X^{57} - 6$  possède au moins une racine réelle, mais ne possède pas de racine rationnelle.

**Exercice 30.** Soient  $a, b$  des réels, et  $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$ . Pour quelles valeurs de  $a$  et  $b$  le polynôme  $P$  est-il le carré d'un polynôme de  $\mathbf{R}[X]$ ?

**Solution :** Puisque  $P$  est de degré 4, il ne peut être le carré que d'un polynôme de degré deux. On cherche donc les valeurs de  $a$  et  $b$  telles qu'il existe  $\lambda, c$  et  $d$  tels que

$$X^2 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1 = (\lambda X^2 + cX + d)^2 = \lambda^2 X^4 + 2\lambda c X^3 + (2\lambda d + c^2) X^2 + 2cdX + d^2.$$

Par identification, si la solution existe si et seulement si le système

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1 \\ 2\lambda c = 2a \\ 2\lambda d + c^2 = b \\ 2cd = 2 \\ d^2 = 1 \end{cases}$$

a une solution. Puisque  $d^2 = 1$  et  $cd = 1$ , alors  $c = d = \pm 1$ . De plus  $\lambda = \pm 1$ . On a donc que  $a = \lambda c$  et  $b = 2\lambda c + 1$ . Puisqu'il n'y a que deux valeurs possibles à  $\lambda c$ , à savoir 1 ou  $-1$ , le système a donc deux solutions,  $a = 1$  et  $b = 3$  ou  $a = -1$  et  $b = -1$ .

Ainsi, il faut et il suffit que  $(a, b) \in \{(1, 3); (-1, -1)\}$  pour que le polynôme  $P$  soit un carré.

**Exercice 31.**

1. Soient  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$  quatre entiers. Trouver deux entiers  $q_1$  et  $q_2$  tels que  $(p_1^2 + p_2^2)(p_3^2 + p_4^2) = q_1^2 + q_2^2$ .  
(Indication : manipuler les nombres complexes  $p_1 + ip_2$  et  $p_3 + ip_4$ ).
2. Soient  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  quatre polynômes de  $\mathbf{R}[X]$ . En s'inspirant de la question précédente, trouver deux polynômes réels  $Q_1, Q_2$  tels que  $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$ .
3. Soit  $P \in \mathbf{R}[X]$ . Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
  - (a) Pour tout réel  $x$ , on a  $P(x) \geq 0$ .
  - (b) Il existe  $Q_1, Q_2$  dans  $\mathbf{R}[X]$  tels que  $P = Q_1^2 + Q_2^2$ .

**Solution :**

1. Posons  $p = p_1 + ip_2$ ,  $p' = p_3 + ip_4$ . Le problème devient de trouver  $q = q_1 + iq_2$  où  $(q_1, q_2) \in \mathbf{Z}^2$  tel que  $|p|^2|p'|^2 = |q|^2$ . Il est donc clair que poser  $q = pp'$  convient, et de plus ses parties réelles et imaginaires sont entières. En développant, on trouve en effet  $q_1 = p_1p_3 - p_2p_4 \in \mathbf{Z}$  et  $q_2 = p_2p_3 + p_1p_4$ .
2. On pose  $Q_1 = P_1P_3 - P_2P_4$  et  $Q_2 = P_2P_3 + P_1P_4$ , qui sont des polynômes réels, et en développant on retrouve bien que  $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$ .
3. L'implication  $b) \Rightarrow a)$  est évidente. Montrons la réciproque. Soit  $P$  un polynôme tel que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $P(x) \geq 0$ . On sait alors que  $P$  se décompose en facteurs irréductibles de la forme  $X^2 + 2bX + c^2$ , avec  $b^2 - c^2 \leq 0$ , car sinon  $P$  aurait une racine simple, ce qui n'est pas possible à cause de son signe. On note  $P = P_1 \dots P_r$  la décomposition en facteurs irréductibles de  $P$ . Pour  $1 \leq n \leq r$ . Posons l'hypothèse de récurrence  $H_n$  : "Il existe deux polynômes  $Q_1$  et  $Q_2$  tels que  $P_1 \dots P_n = Q_1^2 + Q_2^2$ ".

Initialisons.  $P_1 = X^2 + 2bX + c^2 = (X - b)^2 + \sqrt{c^2 - b^2}$ , donc  $H_1$  est vraie.

La question 2 montre que si  $H_n$  est vraie, alors  $H_{n+1}$ . Par récurrence, on a donc pour tout  $1 \leq n \leq r$ ,  $H_n$  est vraie. En particulier  $H_r$  est vraie et donc il existe deux polynômes  $Q_1$  et  $Q_2$  tels que  $P = Q_1^2 + Q_2^2$ .

**Exercice 32.** Déterminer tous les polynômes  $P$  vérifiant les relations suivantes :

- a)  $P(X^2 + 1) = P(X)$ ,
- b)  $P(2X + 1) = P(X)$ ,
- c)  $(1 - X)P'(X) - P(X) = X^n$ , où  $n \in \mathbf{N}$ ,
- d)  $P'(X)^2 = 4P(X)$ ,
- e)  $P(P(X)) = P(X)$ .

**Solution :**

- a) Considérons les degrés :  $\deg[P(X^2 + 1)] = 2\deg P$ , mais doit être aussi égal à  $\deg P$ , donc  $\deg P \in \{-\infty, 0\}$ . Réciproquement, tous les polynômes constant conviennent. Ce sont donc les seules solutions.
- b) Si le polynôme  $P$  est non nul, il s'écrit de manière unique comme  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , avec  $a_n \neq 0$ . Or,  $P(2x + 1) = \sum_{k=0}^n a_k (2X + 1)^k$ . Par identification du terme de plus haut degré, on a  $a_n = 2^n a_n$ . Puisque  $a_n \neq 0$ , on a donc  $2^n = 1$ , c'est à dire  $n = 0$ . Puisque les polynômes constant et le polynôme nul conviennent, ce sont les seules solutions.

- c) Puisque le polynôme nul n'est pas solution,  $P$  s'écrit de façon unique comme  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ , avec  $a_d \neq 0$ . Si  $d = 0$ , il n'existe de solution que si  $n = 0$  et alors  $P = 1$ . On suppose donc désormais que  $d \geq 1$ . On a donc

$$\begin{aligned} (1 - X)P'(X) - P(X) &= \sum_{k=1}^d k a_k X^{k-1} - \sum_{k=1}^d k a_k X^k - \sum_{k=0}^d X^k \\ &= a_1 - a_0 + \sum_{k=1}^{d-1} [(k+1)a_{k+1} - k a_k - a_k] X^k - (d+1)a_d X^d. \end{aligned}$$

Ainsi, commençons par voir que puisque  $-(d+1)a_d \neq 0$ , alors  $d = n$  nécessairement. On a alors par identification  $a_n = -\frac{1}{n+1}$ ,  $a_1 - a_0 = 0$  et pour tout  $1 \leq k \leq d-1$ ,  $[(k+1)a_{k+1} - k a_k - a_k] = 0$ , c'est à dire  $a_{k+1} = a_k$ . Ainsi, pour tout  $0 \leq k \leq d$ ,  $a_k = a_n = \frac{1}{n+1}$ . Il ne peut y avoir au plus qu'une seule solution, et l'on vérifie facilement que le polynôme  $P = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n X^k$  convient en effet.

- d) Puisque  $\deg[P'(X)^2] = 2(\deg P - 1)$ , on a donc  $2(\deg P - 1) = \deg c$  c'est à dire  $\deg P = 2$ . On cherche donc une solution de la forme  $P = aX^2 + bX + c$ . On a donc  $(2aX + b)^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$ , et donc par identification  $4a^2 = 4a$ ,  $4ab = 4b$  et  $b^2 = 4c$ . Donc  $a = 1$  puisque  $a \neq 0$ , et  $c = b^2/4$ . Réciproquement les polynômes  $P = X^2 + bX + b^2/4 = (X + b/2)^2$  sont tous solutions.

Une autre façon de le prouver est de remarquer que puisque  $P$  est de degré plus grand que 1,  $P$  a une racine  $\alpha$  dans  $\mathbf{C}$ . C'est à dire  $(X - \alpha) | P$ . Or  $P = P'^2$  donc  $(X - \alpha) | P'^2$ , donc  $(X - \alpha) | P'$ , donc  $(X - \alpha)^2 | P'^2$ , c'est à dire  $(X - \alpha)^2 | P$ . Reste à montrer que le polynôme est unitaire pour conclure.

- e) Puisque  $\deg[P(P(X))] = (\deg P)^2$ , on a donc que  $P$  est le polynôme nul ou  $\deg P \in \{0, 1\}$ . On cherche donc les solutions parmi les polynômes  $P = aX + b$ . On a alors  $a(aX + b) + b = ax + b$  donc par identification  $a^2 = a$  et  $ab + b = b$ , d'où  $a = 0$  ou  $a = 1$ , et si  $a = 1$ , alors  $b = 0$ . Puisque qu'ils conviennent, les solutions sont donc les polynômes constants et le polynôme  $X$ .

### **Exercice 33.**

1. Soient  $P_1, P_2$  et  $Q$  trois polynômes. Montrer que  $P_1 - P_2$  divise  $Q(P_1) - Q(P_2)$ .
2. Soit  $P$  un polynôme. Montrer que  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - X$ .

### **Solution :**

1. Si  $Q$  est le polynôme nul, c'est trivial, sinon  $Q = \sum_{k=0}^d q_k X^k$ . On a alors

$$\begin{aligned} Q(P_1) - Q(P_2) &= \sum_{k=0}^d a_k [(P_1(X))^k - (P_2(X))^k] \\ &= \sum_{k=0}^d \left( a_k (P_1(X) - P_2(X)) \sum_{j=0}^{k-1} (P_1(X))^j (P_2(X))^{k-j-1} \right) \\ &= (P_1(X) - P_2(X)) \sum_{k=0}^d \left( a_k \sum_{j=0}^{k-1} (P_1(X))^j (P_2(X))^{k-j-1} \right). \end{aligned}$$

Puisque le terme dans la somme est un polynôme,  $P_1 - P_2$  divise  $Q(P_1) - Q(P_2)$ .

2. D'après la question précédente,  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - P(X)$ . Mais  $P(X) - X$  se divise lui-même, donc  $P(X) - X$  divise  $P(P(X)) - P(X) + P(X) - X = P(P(X)) - X$ .

**Exercice 34. (Polynômes de Tchebychev)** On considère la suite de polynômes  $P_n(x)$  définie par  $P_0(X) = 1$ ,  $P_1(X) = X$ , et pour  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Préciser  $P_2, P_3, P_4$ .
2. Déterminer le terme de plus haut degré de  $P_n$ .
3. Étudier la parité de  $P_n$ .
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$  et  $\theta \in \mathbf{R}$ , on a  $P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .

**Solution :**

1.  $P_2 = 2X^2 - 1$ ,  
 $P_3 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 3X$ ,  
 $P_4 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1) = 8X^4 - 8X^2 + 1$ .
2. Par récurrence double, montrons que  $P_n = 2^n X^n + Q_n$  où  $Q_n$  est de degré au plus  $n - 1$ . Cette proposition est vraie aux rangs 1 et 2 (au rang 0 éventuellement aussi, mais pour éviter l'ambiguïté du degré du polynôme nul, initialisons à 1 et 2.).

Supposons cet énoncé vrai aux rangs  $n$  et  $n + 1$ . On a alors d'après l'hypothèse de récurrence :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n = 2X(2^{n+1}X^{n+1} + Q_{n+1}) - P_n = 2^{n+2}X^{n+2} + 2XQ_{n+1} - P_n.$$

De plus d'après l'hypothèse de récurrence,  $2XQ_{n+1}$  est un polynôme de degré au plus  $n + 1$ , et  $P_n$  est de degré  $n$ . Donc  $Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - P_n$  est un polynôme de degré au plus  $n + 1$ , donc la récurrence est prouvée.

3. Montrons par récurrence double que  $P_n$  est de la parité de  $n$ . C'est vrai aux rangs 1 et 2. De plus, si  $P$  est un polynôme qui a une parité,  $XP$  est un polynôme de parité inverse. Soit donc  $n$  tel  $P_n$  est de la parité de  $n$  et  $P_{n+1}$  est de la parité de  $n + 1$ . Ainsi  $P_{n+2}$  est la somme d'un polynôme de la parité de  $n$  et un polynôme de la parité inverse de  $n + 1$ , soit deux polynômes de la parité de  $n + 2$ . Le résultat est ainsi prouvé par récurrence.
4. Raisonnons une nouvelle fois par récurrence sur  $\mathbf{N}$ . Il est clair que pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $1(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$ , et  $X(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ , donc l'affirmation est vraie aux rangs 0 et 1.

On la suppose vraie aux rangs  $n$  et  $n + 1$ . Soit  $\theta \in \mathbf{R}$ . Alors  $P_{n+2}(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta) \cos((n + 1)\theta) - \cos(n\theta)$ . Or  $\cos(n\theta) = \cos((n + 1 - 1)\theta) = \cos(-\theta) \cos((n + 1)\theta) - \sin(-\theta) \sin((n + 1)\theta)$ , donc

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2 \cos(\theta) \cos((n + 1)\theta) - \cos(\theta) \cos((n + 1)\theta) - \sin(\theta) \sin((n + 1)\theta) \\ &= \cos(\theta) \cos((n + 1)\theta) - \sin(\theta) \sin((n + 1)\theta) \\ &= \cos((n + 2)\theta). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.



**Exercice 35.** Soit  $P$  un polynôme réel scindé à racines simples.

1. Montrer que  $P'$  est aussi scindé à racines simples.
2. Montrer que si  $a$  et  $b$  sont respectivement la plus petite et la plus grande racine de  $P$  alors les racines de  $P'$  sont comprises entre  $a$  et  $b$ .

**Solution :**

1. Soit  $n$  le degré de  $P$ . Soit  $x_1 < \dots < x_n$  les  $n$  racines du polynôme réel  $P$  scindé à racines simples. D'après le théorème de Rolle, puisque la fonction polynomiale associée à  $P$  satisfait à  $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_n)$ , alors sa dérivée s'annule au moins au  $n-1$  points  $y_1, \dots, y_{n-1}$  tels que  $x_1 < y_1 < x_2, x_2 < y_2 < x_3, \dots, x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$ , et donc en particulier  $y_1 < \dots < y_{n-1}$ . Le polynôme  $P'$  a donc au moins  $n-1$  racines différentes dans  $\mathbf{R}$ , or il est de degré  $n-1$ , donc ce sont toutes ses racines et  $P'$  est scindé à racines simples.
2. D'après la question précédente, on a  $x_1 < y_1 < \dots < y_{n-1} < x_n$  ce qui répond à la question.

**Exercice 36.** Soit  $P$  et  $Q$  deux polynômes rationnels.

1. Montrer que  $P|Q$  dans  $\mathbf{Q}[X]$  si, et seulement si  $P|Q$  dans  $\mathbf{C}[X]$ .
2. Montrer que  $P$  et  $Q$  ont le même PGCD considérés comme polynômes à coefficients dans  $\mathbf{Q}$  ou dans  $\mathbf{C}$ .
3. Montrer que si  $P$  est irréductible dans  $\mathbf{Q}[X]$  alors  $P$  et  $P'$  sont premiers entre eux (on dit alors que  $\mathbf{Q}$  est un *corps parfait*).

**Solution :**

1. Si  $P|Q$  dans  $\mathbf{Q}[X]$ , alors  $P|Q$  dans  $\mathbf{C}[X]$ . Réciproquement, supposons que  $P|Q$  dans  $\mathbf{C}[X]$ , et écrivons la division euclidienne de  $Q$  par  $P$  dans  $\mathbf{Q}[X]$  : il existe deux polynômes  $T$  et  $R$  de  $\mathbf{Q}[X]$  avec  $\deg R < \deg P$  tels que  $Q = TP + R$ . Mais  $P|Q$  dans  $\mathbf{C}[X]$ , donc il existe  $S \in \mathbf{C}[X]$  tel que  $Q = PS$ . Donc  $PS = TP + R$ , c'est à dire  $P(S - T) = R$ . Or si  $S - T$  n'est pas le polynôme nul, alors  $\deg(P(S - T)) \geq \deg P$ , ce qui est absurde puisque  $\deg R < \deg P$ . Donc  $S - T$  est le polynôme nul, c'est à dire que  $Q = TP$ , et puisque  $T \in \mathbf{Q}[X]$ , c'est que  $P|Q$  dans  $\mathbf{Q}[X]$ .
2. Puisque la divisibilité est la même dans  $\mathbf{C}[X]$  que  $\mathbf{Q}[X]$ , l'algorithme d'Euclide conduit au même résultat.
3. Soit  $P$  un polynôme irréductible dans  $\mathbf{Q}[X]$ . Par définition, les seuls polynômes rationnels unitaires qui divisent  $P$  sont 1 et  $P$ . Puisque  $\deg P' < \deg P$ , et donc  $P$  ne divise pas  $P'$ , alors  $\text{pgcd}_{\mathbf{Q}}(P, P') = 1$ , et donc  $\text{pgcd}_{\mathbf{C}}(P, P') = 1$ .