

Feuille 1 : Polynômes

Exercice 9-1 Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant les relations suivantes :

1. $P(X^2 + 1) = P(X)$
2. $P(2X + 1) = P(X)$
3. $P(2X) = P'(X)P''(X)$

Exercice 9-2 Soit $P_n(X) = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4)\dots(1 + X^{2^n})$. Calculer les coefficients de P_n .

Exercice 9-3 Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On suppose que Q divise P . Montrer que Q^2 divise $PQ' - P'Q$.

Exercice 9-4 Pour a, b réels, on note $P_{a,b} = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $P_{a,b}$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 9-5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(X + 1) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n)}(X)}{n!}$.

Exercice 9-6 Soit P le polynôme réel défini par $P(X) = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P .

1. Déterminer α .
2. Montrer que -1 est une racine double de P .
3. Montrer que j est une racine multiple de P . En déduire l'ensemble des 6 racines de P .
4. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9-7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et P le polynôme à coefficients réels $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

Exercice 9-8 On définit une suite de polynôme $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $P_n(z + \frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2 \cos(\theta))$.
4. Donner les racines de P_n .

Exercice 9-9

1. Soient α, β, γ les racines de l'équation $X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer la valeur exacte de

$$\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma} .$$

2. Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racine α, β, γ . Calculer :

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\alpha + \gamma} + \frac{\gamma}{\beta + \alpha} .$$

Exercice 9-10 Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles :

1. $X^n + X^{n-1} + \dots + X + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^4 - j$ dans $\mathbb{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 9-11 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $a_i = a_{n-i}$ pour $i \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $z \in \mathbb{C}^*$ est racine alors $\frac{1}{z}$ est racine.
2. Factoriser $6X^4 - 35X^3 + 62X^2 - 35X + 6$.

Exercice 9-12 Montrer que le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a au moins une racine sur \mathbb{R} . Même exercice avec le polynôme $X^7 + 3X^2 + 2$.

Exercice 9-13 Soit $P(X) = X^n - b_1 X^{n-1} - \dots - b_n$ un polynôme réel tel que les b_i soient positifs et non tous nuls.

1. Montrer que P a une seule racine p (simple) réelle strictement positive. On considérera $x \mapsto \frac{P(x)}{x^n}$.
2. Montrer que pour toute autre racine x_0 , $|x_0| \leq p$.
3. Soit $Q(X) = a_0 X^{n-1} + \dots + a_{n-1}$ un polynôme à coefficients réels strictement positifs. En utilisant ce qui précède, montrer que pour tout ξ racine de Q ,

$$|\xi| \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} \left(\frac{a_i}{a_{i-1}} \right).$$

On considérera $(x - \gamma)Q(X)$.

Exercice 9-14 Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de racines z_1, \dots, z_n . Soit $r_0 = \max_k (|z_k|)$. Montrer que $r_0 < 1 + \max_k (|a_k|)$.

Exercice 9-15 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de la division euclidienne de P par $X - 7$. Montrer que $R = P(7)$.

Exercice 9-16 Calculer le pgcd des couples de polynômes (P, Q) suivants :

1. $P(X) = 6(X - 1)^2(X + 2)^3(X^2 + 1)^4$ et $Q(X) = 15(X - 1)(X + 7)^3(X^2 + 1)$,
2. $P(X) = X^7 + 2X^6 - X - 2$ et $Q(X) = X^3 + X^2 - 2X$,
3. $P(X) = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ et $Q(X) = X(X - 1)^2(X - 2)$,
4. $P(X) = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$ et $Q(X) = X^7 + X^5 + 8X^4 + X^3 + 8X^2 + 8$.

Exercice 9-17 Soit $P(X) = X^4 - 5X^3 + 8X^2 - 10X + 12$ et $Q(X) = X^4 + X^2 - 2$. Déterminer le PGCD de P et Q puis déterminer deux polynômes U et V tels que $PU + QV = \text{PGCD}(P, Q)$.

Exercice 9-18 Soient $m \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Calculer le PGCD des polynômes $X^m - 1$ et $X^n - 1$.

Exercice 9-19 Pour tout complexe a , on pose $P_a(X) = 2X^3 - 10X^2 + 16X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le PGCD de P_a et P'_a .
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 9-20

1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 9-21 Soit a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X - a$ et par $X - b$.

1. Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda = \mu = 0$?

Exercice 9-22 Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme $P_n = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $X^2 + X + 1$?

Exercice 9-101 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la formule

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X \cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

Exercice 9-102 Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Exercice 9-103 Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P . Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Exercice 9-104 Soit $P = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 9-105 Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par $X^5 - 1$.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99} + 2X^{42} - 3X^{35} - 2X^{27} + 3$ par $X^5 - 1$.

Exercice 9-106 Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui satisfont à l'identité (*) :

$$(X + 3)P(X) = XP(X + 1).$$

1. Soit P un polynôme vérifiant (*). Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$.
2. Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.
3. En déduire que P est nécessairement de la forme $aX^m(X+1)^n(X+2)^p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n, m, p \in \mathbb{N} - \{0\}$.
4. Démontrer finalement que P vérifie (*) si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX(X+1)(X+2)$.

Exercice 9-107 Soit P un polynôme réel. Montrer que P est positif si et seulement si il est la somme de deux carrés. On décomposera P en facteur irréductible de degré 2 pour lesquels on aura vérifié la proposition.

Exercice 9-108 On définit une suite de polynôme $P_0 = 0, P_1 = 1$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$.
2. En déduire $\forall \mathbb{N}, P_n$ et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Etablir que pour tout $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :

$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m .$$

4. Montrer que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :

$$Pgcd(P_{m+n}, P_n) = Pgcd(P_m, P_n) .$$

5. Conclure que $Pgcd(P_m, P_n) = P_{Pgcd(m,n)}$.