

## Feuille 2 : Limites et continuité des fonctions

### Exercice 2-1

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de  $f$ .
2. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) & \text{(e)} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \\ \text{(b)} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) & \text{(d)} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) & \text{(f)} \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) \end{array}$$

3. En déduire les limites suivantes et comparer les avec la valeur de  $f$  au point concerné.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) & \text{(b)} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & \text{(c)} \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \end{array}$$

### Exercice 2-2 Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & 8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|} & 15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x} \\ 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} & 9. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{|x - 1|} & 16. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \\ 3. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x + 5}{x - 4} & 10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x} - 1} & 17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \sin(x)}{1 + \sqrt{x}} \\ 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^9 - 17}{x^7} & 11. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^2} \right) & 18. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x} \\ 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 7}{8 + 2x - 5x^3} & 12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 5} - x & 19. \lim_{x \rightarrow 0} E(x + 1) \\ 6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2} & 13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} & 20. \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) \\ 7. \lim_{x \rightarrow 1} |x - 1| & 14. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & 21. \lim_{x \rightarrow +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

où  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  désigne la partie entière de  $x \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 2-3

Rappelons que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$  et que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ .

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi x)}{1 - 2x} & 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\sin^2 x} \\ 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} & 5. \lim_{x \rightarrow 1/2} (2x^2 + x - 1) \tan(\pi x) & 8. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln^3 x \\ 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} & 9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}, n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

### Exercice 2-4

1. Si  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 5$ , trouver  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .
2. Si  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -2$ , trouver  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

**Exercice 2-5** Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1.  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$
2.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$ .
3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = xE(1/x)$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$ , où  $E$  dénote la partie entière.

### Exercice 2-6

1. Déterminer les valeurs de  $k \in \mathbb{R}$  pour lesquelles  $f_k$  définie par  $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  est une fonction continue.
2. Soit  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f(x) = \frac{1 + x^3}{1 + x}$ . Trouver une application continue  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $g|_{\mathbb{R} \setminus \{-1\}} = f$

**Exercice 2-7** Montrer que l'équation  $x^3 - 15x + 1 = 0$  a trois solutions dans l'intervalle  $[-4, 4]$ .

**Exercice 2-8** Montrer qu'il existe  $x \in [3\pi/4, \pi]$  tel que  $\tan x + \frac{x}{3} = 0$ .

**Exercice 2-9** Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue telle que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , alors  $f$  est surjective.

**Exercice 2-10** Quelles sont les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues dont l'image est contenue dans  $\mathbb{Z}$ ? dans  $\mathbb{Q}$ ?

**Exercice 2-11** Pour tout entier  $n \geq 2$ , on considère la fonction  $f_n : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique  $x_n > 1$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .
2. Montrer que  $f_{n+1}(x_n) > 0$ .
3. En déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq 2}$  est décroissante et converge vers une limite  $l$ .
4. Déterminer  $l$ .

### Exercice 2-12

Vrai ou faux?

1. Si  $f$  est continue sur un intervalle fermé borné  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$ , alors  $f([a, b])$  est un intervalle fermé borné.
2. Si  $f$  est continue sur un intervalle ouvert borné  $]a, b[$  vers  $\mathbb{R}$ , alors  $f(]a, b[)$  est un intervalle ouvert borné.
3. Si  $f$  est continue sur un intervalle ouvert borné  $]a, b[$  vers  $\mathbb{R}$ , alors  $f(]a, b[)$  est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si  $f$  est continue sur un intervalle ouvert borné  $]a, b[$  vers  $\mathbb{R}$ , alors  $f(]a, b[)$  est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

**Exercice 2-101** Calculer les limites suivantes :

- |  |   |  |
|--|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$        | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$           | 7. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(\ln x)$                   |
| 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)$   | 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2 x - \sqrt{x}$            | 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$         |
| 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x}$ |

**Exercice 2-102** Soit  $f$  une fonction décroissante sur  $]0; +\infty[$  telle que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  on a  $f(x) \geq 0$ .

**Exercice 2-103** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction périodique qui admet une limite en  $+\infty$ . Que peut-on dire de  $f$  ?

**Exercice 2-104**

- Soient  $n \in \mathbb{Z}$  un entier impair et  $a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Montrer que l'équation  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  admette une solution réelle.
- Donner un contre-exemple pour le cas  $n$  est pair.

**Exercice 2-105** Supposons que  $f$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$  et que  $0 \leq f(x) \leq 1$  pour chaque  $x \in [0, 1]$ . Montrer qu'il existe un  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f(c) = c$ . (Indication : si  $f(0) = 0$  ou  $f(1) = 1$  alors on a un tel point  $c$ , sinon appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction définie par  $g(x) = f(x) - x$ .)

**Exercice 2-106** Étudier la continuité de la fonction  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ , sur le domaine de définition.

**Exercice 2-107** Déterminer les valeurs de  $m \in \mathbb{R}$  pour lesquelles  $g_m$  définie par  $g_m(x) = \begin{cases} x - m & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - mx & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$  est une fonction continue.

**Exercice 2-108**

- Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et périodique. Montrer que  $f$  est bornée.
- En utilisant le résultat précédent, calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}$$

**Exercice 2-109** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est bornée et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que  $g \circ f$  et  $f \circ g$  sont bornées.

**Exercice 2-110** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$  et  $f$  une application de  $[a, b]$  vers  $[a, b]$ .

- On suppose que pour tout  $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$  on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Montrer que  $f$  est continue. En déduire qu'il existe  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = x$ .

- On suppose maintenant que pour tout  $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$  avec  $x \neq y$  on a

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

Montrer qu'il existe un unique  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) = x$ .

**Exercice 2-111** Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ .

- Soit  $a \in I$ . Donner une raison pour laquelle :

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)|\right)$$

- En utilisant la question précédente, montrer que si  $f$  et  $g$  sont continues, alors  $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$  l'est aussi.

## Feuille 2 bis : Retour sur les réciproques

### Exercice 2bis-1

Montrer que chacune des applications suivantes est bijective en explicitant sa réciproque :

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = 3x + 1$ .
2.  $g : ]e, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x) = \ln(\ln(\ln x))$ .
3.  $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $a(s, t) = (2s, 3t)$ .
4.  $b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $b(s, t) = (s + t, s - t)$ .
5.  $F : [1, 10[ \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  définie par  $F(t, n) = t \cdot 10^n$ .

### Exercice 2bis-2

Soit  $E, F$  et  $G$  trois ensembles et soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. On suppose  $g$  et  $g \circ f$  bijectives. En utilisant la bijection réciproque  $g^{-1}$ , montrer que  $f$  est bijective.

### Exercice 2bis-3

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une bijection. On suppose  $f$  strictement croissante. Montrer que la bijection réciproque  $f^{-1}$  est également strictement croissante.

### Exercice 2bis-4

1. Rappeler pourquoi  $\text{sh}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ .
2. À l'aide d'une formule vue en cours, calculer la dérivée de la réciproque  $\text{sh}^{-1}$ .
3. Pour  $y$  réel, déterminer une expression de  $\text{sh}^{-1}(y)$  et retrouver le résultat du 2.

### Exercice 2bis-5

1. Montrer qu'on peut restreindre la fonction  $\text{ch}$  en une fonction  $c$  de  $\mathbb{R}_+$  vers  $[1, +\infty[$ .
2. On considère la fonction  $d : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie pour tout  $y \geq 1$  par  $d(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ . Calculer  $c \circ d$ . Les fonctions  $c$  et  $d$  sont-elles réciproques l'une de l'autre ?
3. Calculer  $d \circ c$ .

---

### Exercice 2bis-101

1. Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . Montrer que  $z$  s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme  $z = re^{i\theta}$  avec  $-\pi < \theta < \pi$ .
2. Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  écrit  $re^{i\theta}$  comme à la question 1, on pose  $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ . Montrer que  $\text{Re}[f(z)] > 0$  et qu'on peut donc restreindre  $f$  en une application de  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  vers  $\{w \mid \text{Re}(w) > 0\}$ .
3. Montrer que  $f$  est bijective en fournissant sa réciproque.

### Exercice 2bis-102

Soit  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow E$  une application. On suppose  $f \circ f \circ f = \text{Id}_E$ . Montrer que  $f$  est une bijection.