Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2020-2021**

L3 - Mathématiques générales et applications UE : Topologie et équations différentielles

---

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. *Révisions.* Dans cet exercice, on munit $\mathbf{R}$ (ainsi que ses intervalles) de la distance usuelle. Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ? lipschitziennes ?

$$f: \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto x^2, \end{array} \qquad g: \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x}, \end{array} \qquad h: \begin{array}{ll} [1,+\infty] & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x}. \end{array}$$

Exercice 2. *Révisions.* On munit $]0,+\infty[$ de la distance usuelle et, pour tout entier $n \geq 0$, on note $f_n\colon]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x}$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 3. Soit (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Soit $f\colon X \to Y$ une application continue. Montrer que si $f : X \to Y$ est une application continue alors son graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est un fermé de $X \times Y$.

Exercice 4. Soit (X,d) un espace métrique et A une partie de X. On note χ_A la fonction caractéristique de A définie par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$. On suppose que $\mathbf{R}$ est muni de la distance usuelle.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que χ_A soit continue.
2. Déterminer l'ensemble des points où χ_A est continue.
3. Que peut-on dire de $\chi_{\mathbf{Q}}$?

Exercice 5. On suppose que $\mathbf{R}$ est muni de la distance usuelle. Pour $(n,m) \in \mathbf{N}^2$, on considère la fonction

$$\begin{aligned} f_{n,m}\colon \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto (\cos \pi n! x)^{2m}. \end{aligned}$$

1. Montrer que pour chaque $n \in \mathbf{N}$ fixé, la suite $(f_{n,m})_{m\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une suite g_n que l'on déterminera. Cette convergence est-elle uniforme ?
2. Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers $\chi_{\mathbf{Q}}$.
3. En déduire qu'il existe une fonction qui n'est continue en aucun point et qui est limite (simple) de limites (simples) de fonctions continues sur $\mathbf{R}$.

Exercice 6. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques et $f : X \to Y$. Montrer que f est continue sur X si et seulement si pour toute partie A de X, on a $f\big(\overline{A}\big) \subseteq \overline{f(A)}$.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. On considère la forme linéaire $\varphi\colon E \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi(f) = f(0)$.

1. Montrer que φ n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. Qu'en est-il si on munit E de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$?

<u>Exercice 8.</u> Soit E l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R}),\|\cdot\|_1)$. On considère l'application $\mu : E \to E$ définie par

$$\mu(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ pour } f \in E \text{ et } x \in [0,1].$$

1. Montrer que μ est bien définie et que μ est une application linéaire continue.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(t) = n(1-t)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } t \in [0,1].$$

   Pour chaque $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.
3. En déduire la norme de μ.

<u>Exercice 9.</u> On considère $\ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Rappelons que pour une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$, la norme de u vaut $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n|$.
Soit φ l'application de $\ell^\infty(\mathbf{R})$ vers lui-même qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty(\mathbf{R})$ associe la suite

$$\varphi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

1. Montrer que φ est une application linéaire continue.
2. Déterminer la norme de φ.

<u>Exercice 10.</u> $(\star)$ Soit (X,d) un espace métrique et $f : X \to [0,1]$ une application. Dans cet exercice l'intervalle $[0,1]$ est muni de la distance usuelle.
Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction

$$\begin{aligned} f_n \colon X &\to [0,1] \\ x &\mapsto \inf_{y\in X}(f(y) + nd(x,y)). \end{aligned}$$

0. Remarquer que pour tout $n \geq 0$, on a $f_n \leq f$.
1. Montrer que pour chaque $n \geq 0$, la fonction f_n est n-lipschitzienne.
2. Soit $a \in X$. Montrer que

$$\forall r > 0, \quad \forall n \geq 1/r, \quad f_n(a) \geq \inf_{y\in B(a,r)} f(y).$$

3. Montrer que si f est continue en a alors la suite $(f_n(a))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.
4. Montrer que si f est uniformément continue alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f.