Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2020-2021**

L3 - Mathématiques générales et applications UE : Topologie et équations différentielles

---

Correction de l'exercice 5 de la feuille n° 3

Exercice 5. On considère, pour tout $(n, m) \in \mathbf{N}^2$, $f_{n,m} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto (\cos(\pi n! x))^{2m}$.

1. On remarque que pour n et x fixés, on doit étudier la convergence d'une suite géométrique : si on pose $\alpha = (\cos(\pi n! x))^2$, on a $f_{n,m}(x) = \alpha^m$. Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 \leq \cos(\pi n! x) \leq 1$.

   Soit $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$,

   $$\begin{array}{ccccc} \cos(\pi n! x) = -1 & \iff & \exists k \in \mathbf{Z},\ \pi n! x = (2k+1)\pi & \iff & \exists k \in \mathbf{Z},\ x = \frac{2k+1}{n!}; \\ \cos(\pi n! x) = 1 & \iff & \exists k \in \mathbf{Z},\ \pi n! x = 2k\pi & \iff & \exists k \in \mathbf{Z},\ x = \frac{2k}{n!}. \end{array}$$

   Ainsi :
   — Si $x \in \left\{ \dfrac{2k+1}{n!}\ :\ k \in \mathbf{Z} \right\} = A_n$, alors, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $f_{n,m}(x) = 1$, donc, $f_{n,m}(x) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 1$.
   — Si $x \in \left\{ \dfrac{2k}{n!}\ :\ k \in \mathbf{Z} \right\} = B_n$, alors, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $f_{n,m}(x) = 1$, donc $f_{n,m}(x) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 1$.
   — Si $x \in \mathbf{R} \setminus (A_n \cup B_n)$, $-1 < \cos(\pi n! x) < 1$, d'où $f_{n,m}(x) = 1 \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$.
   Pour $n \in \mathbf{N}$, posons $C_n = A_n \cup B_n = \{\dfrac{k\pi}{n!} : k \in \mathbf{Z}\}$. On vient d'établir que $(f_{n,m})_{m \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers $g_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin C_n \\ 1 & \text{si} \quad x \in C_n \end{cases}$.

   S'il y a convergence uniforme alors c'est vers la fonction g_n. De plus, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $f_{n,m}$ est continue sur $\mathbf{R}$, ainsi si la convergence est uniforme, g_n doit être continue sur $\mathbf{R}$.
   Mais, $0 \in C_n$, d'où $g_n(0) = 1$, et, pour tout $x \in]0, \frac{1}{n!}[$, $x \notin C_n$, d'où $g_n(x) = 0$, ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} g_n(x) = 0 \neq g_n(0)$. On en déduit que g_n n'est pas continue en 0.
   Donc la convergence n'est pas uniforme.

2. • Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \notin C_n$ et donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g_n(x) = 0$, d'où $g_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = \chi_{\mathbf{Q}}(x)$.
   • Soit $x \in \mathbf{Q}$, alors il existe $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$. Ainsi $x = \frac{(q-1)! p}{q!}$, d'où $x \in C_q$.
   De plus, soit $n \geq q$,

   $$x = \frac{(q-1)! p}{q!} = \frac{(q-1)! p (q+1) \dots n}{q! (q+1) \dots n} = \frac{(q-1)! p (q+1) \dots n}{n!}$$

   donc $x \in C_n$.
   Finalement, pour tout $n \geq q$, $x \in C_n$, c'est-à-dire que, pour tout $n \geq q$, $g_n(x) = 1$, par conséquent,

   $$g_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 = \chi_{\mathbf{Q}}(x).$$

   Donc $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers $\chi_{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{R}$.

3. $\chi_{\mathbf{Q}}$ n'est continue en aucun point (voir l'exercice 4 de la feuille 3), mais elle est limite simple de la suite (g_n) où, pour tout $n \in \mathbf{N}$, g_n est elle-même limite simple de la suite $(f_{n,m})_{m \in \mathbf{N}}$ et, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $f_{n,m}$ sont des fonctions continues sur $\mathbf{R}$.