
Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) + \frac{y(t)}{t^2} = -\frac{1}{t^3},\ t \in]0, +\infty[. \tag{1}$$

2. Déterminer la solution de (1) vérifiant $y(1) = 1$.

Exercice 2. On s'intéresse à l'équation différentielle suivante

$$(e^t - 1)y'(t) + e^t y(t) = 1,\ t \in I. \tag{2}$$

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Déterminer toutes les solutions maximales de (2) dans le cas où $I =]0, +\infty[$.
3. Déterminer toutes les solutions maximales de (2) dans le cas où $I =]-\infty, 0[$.
4. Existe-t-il des solutions de (2) définies sur $\mathbf{R}$?

Exercice 3. Soit $T > 0$, $f : [0, T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Soit $x : [0, T] \to \mathbf{R}$ et $y : [0, T] \to \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables telles que pour tout $t \in [0, T]$,

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{et} \quad y'(t) < f(t, y(t)).$$

On suppose de plus que $y(0) < x(0)$. Montrer que pour tout $t \in [0, T]$, $y(t) < x(t)$.
Indication : on pourra considérer $J = \{t \in]0, T] : \forall s \in [0, t],\ y(s) < x(s)\}$, *justifier que* $\sup J$ *est bien défini puis montrer que* $\sup J = T$.

Exercice 4. *Une équation de Bernoulli, exercice extrait du contrôle d'octobre 2017*
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{1}{t}y(t)^2 + \frac{2}{t}y(t), & t > 0 \\ y(1) = 4. \end{cases} \tag{3}$$

1. Montrer que le problème (9) admet une unique solution maximale $y : J \to \mathbf{R}$ définie sur un intervalle ouvert J.
2. Montrer que pour tout $t \in J$, $y(t) \neq 0$.
3. On définit $z : J \to \mathbf{R}, t \mapsto \dfrac{1}{y(t)}$. Montrer que z est solution sur J de l'équation différentielle

$$z'(t) = -\frac{2}{t}z(t) + \frac{1}{t},\ t > 0. \tag{4}$$

4. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de (4).
5. En déduire l'intervalle J et une expression explicite pour la solution y.

Exercice 5. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x(t)^2, \ t \in \mathbf{R} \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Justifier que le problème (5) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.
3. Calculer explicitement cette solution maximale. Est-elle globale ?
4. L'équation différentielle $x'(t) = 1 + x(t)^2$ admet-elle des solutions globales ?

Exercice 6. Soit $y_0 \in \mathbf{R}$, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)), \quad t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{6}$$

1. Montrer que le problème (6) admet une unique solution maximale y. Montrer que cette solution est globale, *i.e.* définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. Montrer de plus que cette solution est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Quelles sont les solutions stationnaires de l'équation différentielle $y'(t) = \sin(y(t))$ (*i.e.* les fonctions constantes solutions) ?
3. On suppose que $0 < y_0 < \pi$. Montrer que

$$\begin{aligned} (i) \qquad & \forall t \in \mathbf{R}, \ 0 < y(t) < \pi, \\ (ii) \qquad & \lim_{t \to -\infty} y(t) = 0, \ \lim_{t \to +\infty} y(t) = \pi \end{aligned}$$

Exercice 7. Soit $r > 0$. On considère l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = ry(t)\big(1 - y(t)\big), \ t \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Cette équation, appelée équation logistique, est utilisée pour modéliser l'évolution d'une population vivant dans un milieu à capacité limitée.

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Déterminer les solutions constantes de (7).
3. Soit $y_0 \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale y de (7) vérifiant $y(0) = y_0$. On note $]t_*, T^*[$ son intervalle de définition (t_*, T^* finis ou infinis).
4. Montrer que si $y_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 1$ alors pour tout $t \in]t_*, T^*[$, $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq 1$.
5. Soit $y_0 \in]0, 1[$. Montrer que la solution maximale est définie sur $\mathbf{R}$, est strictement croissante et vérifie $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 1$.
6. Soit $y_0 > 1$. Montrer que la solution maximale est définie jusqu'en $+\infty$, est strictement décroissante et vérifie $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 1$.
7. Que peut-on dire dans le cas $y_0 < 0$?
8. Calculer explicitement les solutions maximales, retrouver les résultats des questions 5 et 6, et étudier le comportement de la solution maximale quand $y_0 < 0$.

Exercice 8. Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $F : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, et $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -\nabla F(x(t)), \ t \in \mathbf{R}, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{8}$$

où ∇F désigne le gradient de F et est défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \ \nabla F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_d}(x) \right).$$

On suppose de plus que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} F(x) = +\infty.$$

1. Montrer que le problème de Cauchy (8) admet une unique solution maximale x définie sur un intervalle ouvert $]t_-, t_+[$ ($t_\pm$ finis ou non).
2. Montrer que la fonction $t \mapsto F(x(t))$ est décroissante sur $]t_-, t_+[$. En déduire que $t_+ = +\infty$.
3. En considérant le cas $d = 1$ et $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \ x \mapsto x^4/4$, montrer que t_- peut être fini.

Exercice 9. *Extrait du contrôle de novembre 2017*
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $xf(x) < 0$.
Soit $y_0 > 0$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \quad t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{9}$$

1. Montrer que le problème (9) admet une unique solution maximale $y : J \to \mathbf{R}$ définie sur un intervalle ouvert J.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto y(t)^2$ est décroissante sur J.
3. En déduire que l'intervalle J contient $[0, +\infty[$ et qu'il existe $\ell \geq 0$ tel que $\lim_{t \to +\infty} y(t)^2 = \ell$.
4. On veut montrer que $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$. On suppose par l'absurde que $\ell > 0$.
   (a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $y(t) > 0$ et que $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \sqrt{\ell}$.
   (b) En déduire que $y'(t)$ admet une limite quand $t \to +\infty$ puis que $f(\sqrt{\ell}) = 0$.
   (c) Conclure.
5. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $xf(x) \leq -\alpha x^2$. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $y(t) \leq y_0 e^{-\alpha t}$.

Exercice 10. ($\star$)
Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $\alpha > 0$. Soit $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ une application localement lipschitzienne telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \forall y \in \mathbf{R}^d, \ \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^d$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé.
Le but de cet exercice est de montrer que f est un homéomorphisme.

1. Montrer que f est injective.
2. Le but de cette question est de montrer que 0 est dans l'image de f, *i.e.* qu'il existe $a \in \mathbf{R}^d$ tel que $f(a) = 0$.

(a) Soit $T > 0$. On suppose que x et y sont deux solutions de l'équation différentielle

$$x'(t) = -f(x(t)) \tag{10}$$

définies sur $[0, T]$ (au moins).
Montrer que pour tout $t \in [0, T]$, $\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(0) - y(0)\| e^{-\alpha t}$.

(b) Justifier que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -f(x(t)), t \in \mathbf{R}, \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

admet une unique solution maximale x définie sur un intervalle ouvert $]T_-, T_+[$.

(c) Soit $h \in]T_-, T_+[$. Montrer que $t \mapsto x(t+h)$ est solution de (10) sur un intervalle ouvert contenant 0. On précisera sa valeur en 0.

(d) En utilisant (a) et (c), montrer que pour tout $t \in [0, T_+[$, $\|x'(t)\| \leq \|x'(0)\| e^{-\alpha t}$.

(e) Montrer que $T_+ = +\infty$.

(f) Montrer que $x(t)$ admet une limite a quand t tend vers $+\infty$, puis que $f(a) = 0$.

3. Montrer que $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ est surjective.
4. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbf{R}^d$, $\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \dfrac{1}{\alpha} \|x - y\|$.
5. Conclure.