Le but est de donner une correction de la dernière question de l'exercice 7 de la feuille 2, qui a été fait au tableau le 01/10 et dont l'énoncé est rappelé ci-dessous.

Exercice 7.

Soit $r > 0$. On considère l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = ry(t)\big(1 - y(t)\big), \ t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Cette équation, appelée équation logistique, est utilisée pour modéliser l'évolution d'une population vivant dans un milieu à capacité limitée.

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Déterminer les solutions constantes de (1).
3. Soit $y_0 \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale y de (1) vérifiant $y(0) = y_0$. On note $]t_*, T^*[$ son intervalle de définition (t_*, T^* finis ou infinis).
4. Montrer que si $y_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 1$ alors pour tout $t \in]t_*, T^*[$, $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq 1$.
5. Soit $y_0 \in]0, 1[$. Montrer que la solution maximale est définie sur $\mathbf{R}$, est strictement croissante et vérifie $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 1$.
6. Soit $y_0 > 1$. Montrer que la solution maximale est définie jusqu'en $+\infty$, est strictement décroissante et vérifie $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 1$.
7. Que peut-on dire dans le cas $y_0 < 0$?
8. Calculer explicitement les solutions maximales, retrouver les résultats des questions 5 et 6, et étudier le comportement de la solution maximale quand $y_0 < 0$.

Il nous reste à calculer les solutions maximales ; pour cela, considérons y une solution maximale, définie sur $J =]t_*, T^*[$.
Si $y(0) = 0$, alors y est la fonction nulle, solution sur $\mathbf{R}$.
De même si $y(0) = 1$, y est la fonction constante égale à 1, solution sur $\mathbf{R}$.
Supposons maintenant que $y(0) = y_0 \notin \{0, 1\}$.
On a vu à la question 4 que y ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1 (c'est une conséquence du théorème de Cauchy–Lipschitz : deux solutions maximales qui coïncident en un point sont égales partout). Ainsi, pour tout $t \in J$, $y(t)(1 - y(t)) \neq 0$ et on a pour tout $t \in J$,

$$\frac{y'(t)}{y(t)(1 - y(t))} = r.$$

On reconnaît une équation de la forme $g(y(t))y'(t) = r, \ t \in J$ avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{x(1-x)}$.
Si l'on note G une primitive de g, alors cette équation se récrit $(G \circ y)'(t) = r$, donc pour tout $t \in J$, $G(y(t)) = rt + G(y_0)$.
Pour en extraire une information sur y, calculons une primitive de G : on décompose $\dfrac{1}{X(1-X)}$ en éléments simples, ce qui donne l'égalité $\dfrac{1}{X(1-X)} = \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{1-X}$.
On obtient ainsi que sur tout intervalle inclus dans $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x(1-x)}$ est

$$x \mapsto \ln(|x|) - \ln(|1 - x|) = \ln\left(\left|\frac{x}{1-x}\right|\right).$$

Par conséquent, on a pour tout $t \in]t_*, T^*[$ l'égalité

$$\ln\left(\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right|\right) = rt + \ln\left(\left|\frac{y_0}{1-y_0}\right|\right)$$

En notant $K = \dfrac{y_0}{1-y_0}$, ceci nous donne sur $]t_*, T^*[$

$$\left|\frac{y(t)}{1-y(t)}\right| = |K|e^{rt}$$

La fonction $\dfrac{y}{1-y}$ est *continue* sur l'*intervalle* J et elle ne s'annule pas sur J, donc elle est de signe constant (théorème des valeurs intermédiaires) ; en particulier pour tout $t \in J$, $\frac{y(t)}{1-y(t)}$ est du même signe que $\frac{y(0)}{1-y(0)} = K$. Finalement, pour tout $t \in J$,

$$\frac{y(t)}{1-y(t)} = Ke^{rt}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par y (qui, rappelons-le, ne s'annule pas) on obtient pour tout $t \in]t_*, T^*[$

$$\frac{1}{\frac{1}{y(t)} - 1} = Ke^{rt} \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{y(t)} = 1 + \frac{1}{K}e^{-rt}$$

Finalement, on arrive à la formule

$$\forall t \in]t_*, T^*[\quad y(t) = \frac{K}{K + e^{-rt}} = \frac{y_0}{y_0 + (1-y_0)e^{-rt}}.$$

Déterminons maintenant l'intervalle $J =]t_*, T^*[$ et retrouvons les résultats obtenus aux questions 5 et 6.

• Si $y_0 \in]0,1[$, alors $K = \dfrac{y_0}{1-y_0} > 0$ donc $t \mapsto \dfrac{K}{K+e^{-rt}}$ est définie sur $\mathbf{R}$, ainsi $J = \mathbf{R}$, et y est strictement croissante et à valeurs dans $]0,1[$. Elle tend vers 1 en $+\infty$ (et vers 0 en $-\infty$).

• Si $y_0 > 1$, alors $K = \dfrac{y_0}{1-y_0}$ appartient à $]-\infty, -1[$. Puisque $K + e^{-rt}$ s'annule en

$$t = -\frac{1}{r}\ln(-K)$$

qui est négatif, on a donc $t_* = -\frac{1}{r}\ln(-K)$ et la solution maximale est définie sur $J =]t_*, +\infty[$.
La formule obtenue ci-dessus pour $y'(t)$ nous permet de retrouver que $y'(t) < 0$ pour tout $t \in J$ et donc y est strictement décroissante.
Il est immédiat que $y(t)$ tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$. Tout ceci confirme le résultat obtenu à la question 6.

• Reste le cas $y_0 < 0$; cette fois $K = \dfrac{y_0}{1-y_0} \in]-1, 0[$, et $-\dfrac{1}{r}\ln(-K) > 0$.
Donc $T^* = -\dfrac{1}{r}\ln(-K)$, et y est définie sur $]-\infty, T^*[$. De plus y est de nouveau strictement décroissante, tend vers $-\infty$ en T^* (et vers 0 en $-\infty$).
Dans ce cas, la solution explose en temps fini positif. Ici, le calcul explicite permet de compléter l'étude qualitative faite aux questions 5, 6 et 7.