
Correction de l'exercice 10 de la feuille n° 2

Exercice 10.

1. Soit $x, y \in \mathbf{R}^d$ tels que $f(x) = f(y)$. Comme $\langle f(x) - f(y), x - y\rangle \geq \alpha\|x - y\|^2$, on a : $0 \geq \alpha\|x - y\|^2$. Or $\alpha > 0$, d'où $\|x - y\| = 0$ et $x = y$.
   Donc f est injective.

2. (a) On considère $g\colon [0, T] \to \mathbf{R}_+$, $t \mapsto \|x(t) - y(t)\|^2\ e^{2\alpha t} = \langle x(t) - y(t), x(t) - y(t)\rangle\ e^{2\alpha t}$.
   Notons que $t \mapsto \langle x(t) - y(t), x(t) - y(t)\rangle$ est dérivable, et qu'on peut écrire sa dérivée sous la forme $t \mapsto 2\langle x'(t) - y'(t), x(t) - y(t)\rangle$ (pour le montrer, on peut par exemple écrire la formule donnant le produit scalaire de deux vecteurs en fonction de leurs coordonnées, et dériver terme à terme une somme de fonctions dérivables ; on peut aussi calculer la différentielle du produit scalaire et appliquer la règle de la chaîne).
   Donc g est dérivable et, pour tout $t \in [0, T]$, la formule pour la dérivée d'un produit donne

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2e^{2\alpha t}[\langle x'(t) - y'(t), x(t) - y(t)\rangle + \alpha\|x(t) - y(t)\|^2] \\ &= 2e^{2\alpha t}[-\langle f(x(t)) - f(y(t)), x(t) - y(t)\rangle + \alpha\|x(t) - y(t)\|^2] \\ &\leq 2e^{2\alpha t}[-\alpha\|x(t) - y(t)\|^2 + \alpha\|x(t) - y(t)\|^2], \text{ car } e^{2\alpha t} \geq 0 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

   Ainsi g est décroissante, d'où, pour tout $t \in [0, T]$, $g(t) \leq g(0)$. On en déduit que, pour tout $t \in [0, T]$, $\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(0) - y(0)\|\ e^{-\alpha t}$.

   (b) La fonction f est localement lipschitzienne, donc continue, on en déduit que le champ de vecteurs $F\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, $(t, x) \mapsto -f(x)$ associé au problème de Cauchy est continu et localement lipschitzien par rapport à x.
   Ainsi, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, (11) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert contenant 0.

   (c) La fonction x est définie sur $]T_-, T_+[$, on veut $t + h \in]T_-, T_+[$ ou encore $t \in]T_- - h, T_+ - h[$.
   On considère donc $\varphi\colon]T_- - h, T_+ - h[\to \mathbf{R}^d$, $t \mapsto x(t+h)$ et $0 \in]T_- - h, T_+ - h[$ car $h \in]T_-, T_+[$.
   De plus, pour tout $t \in]T_- - h, T_+ - h[$, $\varphi'(t) = x'(t + h) = -f(x(t + h)) = -f(\varphi(t))$.
   Donc φ est solution de (10) et $\varphi(0) = x(h)$.

   (d) Soit $t \in [0, T_+[$ et $h \in]T_-, T_+[$. x et φ sont définies sur $[0, T_+ - h[$ et solutions de (10), ainsi, d'après 2.(a) :

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - x(t)\| &\leq \|\varphi(0) - x(0)\|\ e^{-\alpha t} \\ \|x(t + h) - x(t)\| &\leq \|x(h) - x(0)\|\ e^{-\alpha t}. \end{aligned}$$

   Si $h \neq 0$, on divise par $|h|$ pour obtenir

$$\left\|\frac{x(t + h) - x(t)}{h}\right\| \leq \left\|\frac{x(h) - x(0)}{h}\right\|\ e^{-\alpha t}.$$

   Comme x est dérivable et $\|\cdot\|$ est continue, pour $h \to 0$, on obtient $\|x'(t)\| \leq \|x'(0)\|\ e^{-\alpha t}$.

(e) Soit $t \in [0, T_+[$, $x(t) - x(0) = \displaystyle\int_0^t x'(s)\, ds$, d'où :

$$\begin{aligned}
\|x(t)\| &\leq \|x(0)\| + \int_0^t \|x'(s)\|\, ds \leq \|x(0)\| + \|x'(0)\| \int_0^t e^{-\alpha s} ds \\
&\leq \|x(0)\| + \frac{\|x'(0)\|}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \\
&\leq \|x(0)\| + \frac{\|x'(0)\|}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Ainsi x est borné sur $[0, T_+[$, et le théorème d'explosion en temps fini implique que $T_+ = +\infty$.

(f) Puisque $\|x'(t)\|$ est majoré par $\|x'(0)\|e^{-\alpha t}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \|x'(s)\| ds$ est convergente. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x'(s) ds$ converge également, ce qui revient à dire que $x(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$.

Si a est la limite de x en $+\infty$, comme d'après (d), $\lim\limits_{t \to +\infty} x'(t) = 0$, en passant à la limite dans $x'(t) = -f(x(t))$, on obtient $f(a) = 0$ (car f est continue).

3. Soit $\beta \in \mathbf{R}^d$, on considère $g = f - \beta \colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$, on vérifie que g est localement lipschitzienne et que, pour tout $x, y \in \mathbf{R}^d$, $\langle g(x) - g(y), x - y\rangle \geq \alpha\|x - y\|^2$. Ainsi, g vérifie les mêmes hypothèses que la fonction f, donc d'après la question 2., il existe $\alpha \in \mathbf{R}^d$ tel que $g(\alpha) = 0$, donc $f(\alpha) = \beta$. Par conséquent, f est surjective.

4. Soit $x, y \in \mathbf{R}^d$, si $x = y$ c'est terminé ; supposons maintenant $x \neq y$, on a d'une part :

$$\begin{aligned}
\langle f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(y)), f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\rangle &\geq \alpha\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\|^2 \\
\text{ou encore : } \langle x - y, f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\rangle &\geq \alpha\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\|^2.
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\langle x - y, f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\rangle \leq \|x - y\| \times \|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\|.$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\alpha\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\|^2 &\leq \|x - y\| \times \|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \\
\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| &\leq \frac{1}{\alpha}\,\|x - y\| \text{ car } f^{-1}(x) \neq f^{-1}(y).
\end{aligned}$$

5. f est bijective (on a montré qu'elle est injective et surjective) et continue, d'après la question précédente f^{-1} est lipschitzienne donc continue, par conséquent, f est un homéomorphisme.