---

**Feuille d'exercices n° 2**

---

**Exercice 1.** *Voir les indications.*

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) + \frac{y(t)}{t^2} = -\frac{1}{t^3},\ t \in ]0, +\infty[. \tag{1}$$

2. Déterminer la solution de (1) vérifiant $y(1) = 1$.

**Exercice 2.** *Voir les indications.*
On s'intéresse à l'équation différentielle suivante

$$(e^t - 1)y'(t) + e^t y(t) = 1,\ t \in I. \tag{2}$$

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Déterminer toutes les solutions maximales de (2) dans le cas où $I = ]0, +\infty[$.
3. Déterminer toutes les solutions maximales de (2) dans le cas où $I = ]-\infty, 0[$.
4. Existe-t-il des solutions de (2) définies sur $\mathbf{R}$ ?

**Exercice 3.** *Voir les indications.*
Soit $T > 0$, $f : [0, T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Soit $x : [0, T] \to \mathbf{R}$ et $y : [0, T] \to \mathbf{R}$ deux fonctions dérivables telles que pour tout $t \in [0, T]$,

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{et} \quad y'(t) < f(t, y(t)).$$

On suppose de plus que $y(0) < x(0)$. Montrer que pour tout $t \in [0, T]$, $y(t) < x(t)$.
*Indication : on pourra considérer* $J = \{t \in ]0, T] : \forall s \in [0, t],\ y(s) < x(s)\}$, *justifier que* $\sup J$ *est bien défini puis montrer que* $\sup J = T$.

**Exercice 4.** *Une équation de Bernoulli, exercice extrait du contrôle d'octobre 2017. Voir les indications.*
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{1}{t}y(t)^2 + \frac{2}{t}y(t), \quad t > 0 \\ y(1) = 4. \end{cases} \tag{3}$$

1. Montrer que le problème (9) admet une unique solution maximale $y : J \to \mathbf{R}$ définie sur un intervalle ouvert $J$.
2. Montrer que pour tout $t \in J$, $y(t) \neq 0$.
3. On définit $z : J \to \mathbf{R}, t \mapsto \dfrac{1}{y(t)}$. Montrer que $z$ est solution sur $J$ de l'équation différentielle

$$z'(t) = -\frac{2}{t}z(t) + \frac{1}{t},\ t > 0. \tag{4}$$

4. Déterminer l'ensemble des solutions maximales de (4).
5. En déduire l'intervalle $J$ et une expression explicite pour la solution $y$.

**Exercice 5.** *Voir les indications.*
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x(t)^2, \ t \in \mathbf{R} \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Justifier que le problème (5) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.
3. Calculer explicitement cette solution maximale. Est-elle globale ?
4. L'équation différentielle $x'(t) = 1 + x(t)^2$ admet-elle des solutions globales ?

**Exercice 6.** *Voir les indications.*
Soit $y_0 \in \mathbf{R}$, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = \sin(y(t)), \quad t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{6}$$

1. Montrer que le problème (6) admet une unique solution maximale $y$. Montrer que cette solution est globale, *i.e.* définie sur $\mathbf{R}$ tout entier. Montrer de plus que cette solution est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Quelles sont les solutions stationnaires de l'équation différentielle $y'(t) = \sin(y(t))$ (*i.e.* les fonctions constantes solutions) ?
3. On suppose que $0 < y_0 < \pi$. Montrer que

$$\begin{aligned} &(i) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \ 0 < y(t) < \pi, \\ &(ii) \qquad \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0, \ \lim_{t\to+\infty} y(t) = \pi \end{aligned}$$

**Exercice 7.** *Voir les indications.*
Soit $r > 0$. On considère l'équation différentielle suivante

$$y'(t) = ry(t)\big(1 - y(t)\big), \ t \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

*Cette équation, appelée équation logistique, est utilisée pour modéliser l'évolution d'une population vivant dans un milieu à capacité limitée.*

1. L'équation différentielle ci-dessus est-elle linéaire ? autonome ?
2. Déterminer les solutions constantes de (7).
3. Soit $y_0 \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale $y$ de (7) vérifiant $y(0) = y_0$. On note $]t_*, T^*[$ son intervalle de définition ($t_*$, $T^*$ finis ou infinis).
4. Montrer que si $y_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 1$ alors pour tout $t \in ]t_*, T^*[$, $y(t) \neq 0$ et $y(t) \neq 1$.
5. Soit $y_0 \in ]0, 1[$. Montrer que la solution maximale est définie sur $\mathbf{R}$, est strictement croissante et vérifie $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$.
6. Soit $y_0 > 1$. Montrer que la solution maximale est définie jusqu'en $+\infty$, est strictement décroissante et vérifie $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$.
7. Que peut-on dire dans le cas $y_0 < 0$ ?
8. Calculer explicitement les solutions maximales, retrouver les résultats des questions 5 et 6, et étudier le comportement de la solution maximale quand $y_0 < 0$.

**Exercice 8.** *Voir les indications.*

Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $F : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, et $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -\nabla F(x(t)), \ t \in \mathbf{R}, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{8}$$

où $\nabla F$ désigne le gradient de $F$ et est défini par

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \ \nabla F(x) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_d}(x) \right).$$

On suppose de plus que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} F(x) = +\infty.$$

1. Montrer que le problème de Cauchy (8) admet une unique solution maximale $x$ définie sur un intervalle ouvert $]t_-, t_+[$ ($t_\pm$ finis ou non).
2. Montrer que la fonction $t \mapsto F(x(t))$ est décroissante sur $]t_-, t_+[$. En déduire que $t_+ = +\infty$.
3. En considérant le cas $d = 1$ et $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \ x \mapsto x^4/4$, montrer que $t_-$ peut être fini.

**Exercice 9.** *Extrait du contrôle de novembre 2017. Voir les indications.*

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $xf(x) < 0$.
Soit $y_0 > 0$. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \quad t \in \mathbf{R} \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{9}$$

1. Montrer que le problème (9) admet une unique solution maximale $y : J \to \mathbf{R}$ définie sur un intervalle ouvert $J$.
2. Montrer que la fonction $t \mapsto y(t)^2$ est décroissante sur $J$.
3. En déduire que l'intervalle $J$ contient $[0, +\infty[$ et qu'il existe $\ell \geq 0$ tel que $\lim_{t \to +\infty} y(t)^2 = \ell$.
4. On veut montrer que $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 0$. On suppose par l'absurde que $\ell > 0$.
   (a) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $y(t) > 0$ et que $\lim_{t \to +\infty} y(t) = \sqrt{\ell}$.
   (b) En déduire que $y'(t)$ admet une limite quand $t \to +\infty$ puis que $f(\sqrt{\ell}) = 0$.
   (c) Conclure.
5. On suppose de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $xf(x) \leq -\alpha x^2$. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $y(t) \leq y_0 e^{-\alpha t}$.

**Exercice 10.** ($\star$) *Voir les indications.*

Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $\alpha > 0$. Soit $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ une application localement lipschitzienne telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \forall y \in \mathbf{R}^d, \ \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^d$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé.
Le but de cet exercice est de montrer que $f$ est un homéomorphisme.

1. Montrer que $f$ est injective.
2. Le but de cette question est de montrer que 0 est dans l'image de $f$, *i.e.* qu'il existe $a \in \mathbf{R}^d$ tel que $f(a) = 0$.

(a) Soit $T > 0$. On suppose que $x$ et $y$ sont deux solutions de l'équation différentielle

$$x'(t) = -f(x(t)) \tag{10}$$

définies sur $[0, T]$ (au moins).
Montrer que pour tout $t \in [0, T]$, $\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(0) - y(0)\| e^{-\alpha t}$.

(b) Justifier que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -f(x(t)), t \in \mathbf{R}, \\ x(0) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

admet une unique solution maximale $x$ définie sur un intervalle ouvert $]T_-, T_+[$.

(c) Soit $h \in ]T_-, T_+[$. Montrer que $t \mapsto x(t + h)$ est solution de (10) sur un intervalle ouvert contenant 0. On précisera sa valeur en 0.

(d) En utilisant (a) et (c), montrer que pour tout $t \in [0, T_+[$, $\|x'(t)\| \leq \|x'(0)\| e^{-\alpha t}$.

(e) Montrer que $T_+ = +\infty$.

(f) Montrer que $x(t)$ admet une limite $a$ quand $t$ tend vers $+\infty$, puis que $f(a) = 0$.

3. Montrer que $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ est surjective.
4. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbf{R}^d$, $\|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \dfrac{1}{\alpha} \|x - y\|$.
5. Conclure.

**Indications.**

**Indications pour l'exercice 1.** *Retour à l'énoncé.*

1. Mettre en oeuvre la méthode de variation de la constante.

**Indications pour l'exercice 2.** *Retour à l'énoncé.*

2. Mettre en oeuvre la méthode de variation de la constante.
3. Idem.
4. Peut-on recoller des solutions obtenues aux questions 2. et 3. en des solutions sur $\mathbf{R}$ ? On prendra soin de vérifier la dérivabilité d'un tel recollement.

**Indications pour l'exercice 3.** *Retour à l'énoncé.*
On peut introduire $z = x - y$, on a alors $J = \{t \in ]0, T] : \forall s \in [0, t],\ z(s) > 0\}$.
Pour justifier que $\sup J$ existe, il faut vérifier que $J$ est non vide et majoré.
Raisonner ensuite par l'absurde en supposant que $T^* = \sup J < T$. Montrer alors que $z(T^*) = 0$ et $z'(T^*) > 0$ et aboutir à une contradiction.

**Indications pour l'exercice 4.** *Retour à l'énoncé.*

1. On appliquera le théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour cela définir précisément le champ de vecteurs et justifier que le théorème s'applique.
2. Remarquer que la fonction nulle est solution de (9) sur $\mathbf{R}$.
4. L'équation (4) est linéaire...

**Indications pour l'exercice 5.** *Retour à l'énoncé.*

2. On appliquera le théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour cela définir précisément le champ de vecteurs et justifier que le théorème s'applique.
3. Bien préciser l'intervalle de définition de la solution maximale, il doit contenir 0.

**Indications pour l'exercice 6.** *Retour à l'énoncé.*

1. Plusieurs points sont à montrer. On appliquera d'abord le théorème de Cauchy-Lipschitz (pour cela définir précisément le champ de vecteurs et justifier que le théorème s'applique).

   Ensuite, pour montrer que la solution maximale est globale, utiliser le théorème d'explosion en temps fini.
3. Pour $(i)$, on utilisera une des conséquences du théorème de Cauchy-Lipschitz vues en cours et la question 2.

   Pour $(ii)$, commencer par justifier que les limites existent ; ensuite en déduire que $y'$ admet elle-aussi des limites en $\pm\infty$ et conclure soigneusement.

**Indications pour l'exercice 7.** *Retour à l'énoncé.*
Voir les indications pour l'exercice 6.

**Indications pour l'exercice 8.** *Retour à l'énoncé.*

2. Dériver. C'est l'occasion de revoir la dérivation des fonctions composées de plusieurs variables.

**Indications pour l'exercice 9.** *Retour à l'énoncé.*

5. Penser au lemme de Gronwall.

**Indications pour l'exercice 10.** *Retour à l'énoncé.*

2. (a) Montrer que la fonction $\varphi : t \mapsto \|x(t) - y(t)\|^2$ vérifie : pour tout $t \in [0, T]$, $\varphi'(t) \leq -2\alpha\varphi(t)$.
   (d) Écrire des taux d'accroissements et passer à la limite.
   (e) Justifier que $x$ ne peut exploser en temps fini positif.
   (f) Justifier l'intégrabilité de $x'$.