
Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. *Voir les indications.*
Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbf{R}$. Montrer l'égalité et l'inégalité suivantes :

1. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
2. si $A \cap B \neq \emptyset$, $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$.

Exercice 2. *Voir les indications.*
On définit, pour $j = 1, \ldots, 4$, l'application $d_j : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$d_1(x, y) = (x - y)^2, \quad d_2(x, y) = |x - 2y|, \quad d_3(x, y) = \sqrt{|x - y|}, \quad d_4(x, y) = |x^2 - y^2|.$$

Parmi ces applications, la(les)quelle(s) défini(ssen)t une distance sur $\mathbf{R}$?

Exercice 3. *Voir les indications.*
Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit $\phi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une application croissante s'annulant uniquement en 0 et sous-additive, *i.e.* : pour tout $(u, v) \in (\mathbf{R}^+)^2$, $\phi(u + v) \leq \phi(u) + \phi(v)$. Montrer que $\delta = \phi \circ d$ est une distance sur X.
2. (a) Montrer que la fonction $\phi : u \mapsto \dfrac{u}{1+u}$ satisfait les hypothèses de la question 1. Montrer que la distance $\delta = \phi \circ d$ a les propriétés suivantes :
   — δ est bornée ;
   — $\delta(x, y) = \delta(x', y')$ si et seulement si $d(x, y) = d(x', y')$;
   — δ définit la même topologie que d.

   (b) On considère le cas où $X = \mathbf{R}$ et d est la distance usuelle associée à la valeur absolue. Montrer que d et δ ne sont pas Lipschitz-équivalentes.

Exercice 4. *Voir les indications.*
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x - y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 5. *Voir les indications.*
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes. On déterminera les meilleures constantes α_n, β_n, γ_n, a_n, b_n, c_n telles que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\alpha_n \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq a_n \|x\|_\infty, \quad \beta_n \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq b_n \|x\|_\infty, \quad \gamma_n \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_n \|x\|_1.$$

Exercice 6. *Voir les indications.*
Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{0\le k\le n} |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbf{R}[X]$.
2. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 7. *Voir les indications.*

1. Soit (X, d) un espace métrique, $r > 0$. Montrer que le diamètre de toute boule de rayon r dans X (ouverte ou fermée) est inférieur ou égal à $2r$.
2. Soit X un ensemble muni de la distance discrète. Quel est le diamètre de $B(x, \frac{1}{2})$ pour $x \in X$?
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Calculer le diamètre des boules (fermées et ouvertes) de E en fonction de leur rayon.

Exercice 8. *Voir les indications.*
Dans cet exercice, on munit $\mathbf{R}^2$ de la norme euclidienne. Les parties suivantes de $\mathbf{R}^2$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

a) $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ *b)* $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ *c)* $\{(x, x^2) : x \in \mathbf{R}\}$ *d)* $\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbf{N}^*\right\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0,\ xy \ge 0\}$ *f)* $\{(x, x^2) : x > 0\}$

Exercice 9. *Voir les indications.*
On munit $\mathbf{R}$ de la distance usuelle. Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties suivantes :

a) $\mathbf{Z}$ *b)* $]-1,1[\cap\mathbf{Q}$ *c)* $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\right\}$ *d)* $\{e^x : x \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 10. *Voir les indications.*
Dans la suite, $\mathbf{R}^2$ est muni de la distance euclidienne. On note $A = [0,1[\times[0,1[$.
Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse et justifier avec précision la réponse.

a) $(0, \frac{1}{2}) \in \overline{A}$ *b)* $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \in \mathring{A}$ *c)* $(1,1) \in \overline{A}$ *d)* $(0,0) \in \mathring{A}$.

Exercice 11. *Voir les indications.*
Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit A un ouvert de X et B une partie quelconque de X. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A\cap B}$.
   En utilisant des intervalles de $\mathbf{R}$, montrer que cette inclusion peut ne pas être vraie si A n'est pas ouvert.
2. Dans $\mathbf{R}$, donner des exemples d'ouverts A et B tels que les ensembles $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ et $\overline{A\cap B}$ soient tous différents.

Exercice 12. *Topologie induite*

Soit $X = \{x \in \mathbf{R} : \sin x > 0\}$, muni de la distance induite $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$, $(x, y) \mapsto |x - y|$. On note $A =]0, \pi[$.

1. Étudier si A est un ouvert de (X, d).
2. Étudier si A est un fermé de (X, d).

Exercice 13. *Voir les indications.*

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$.

1. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.

   Pour $f \in E$ et $r > 0$, représenter graphiquement $B(f, r)$.
2. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
3. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$. Montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
4. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0,1], f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
5. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes sur E ?

Exercice 14. *Voir les indications.*

On considère $X = \ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Dans cet exercice, il est commode de noter une suite réelle x de la façon suivante :

$$x : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ n \mapsto x(n).$$

On munit X de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x(n)|$. On note $Y = \{x \in \mathbf{R}^\mathbf{N} : \lim_{n \to +\infty} x(n) = 0\}$.

1. Montrer que $Y \subset X$.
2. Montrer que Y est fermé dans $(X, \|\cdot\|_\infty)$.
3. On note Z l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que Z est dense dans Y mais que Z n'est pas dense dans X.

Exercice 15. *Distance à une partie* *Voir les indications.*

Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie non vide A de X, on définit la distance à A par

$$d(\cdot, A) : X \to \mathbf{R},\ x \mapsto d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

1. Montrer que pour toute partie non vide A de X, l'application $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne, *i.e.* pour tout $x \in X$, $y \in X$, on a : $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
2. Soit A une partie non vide de X, $x \in X$. Montrer que x appartient à $\overline{A}$ si et seulement si on a $d(x, A) = 0$.
3. Montrer que tout ouvert de X peut s'écrire comme une réunion dénombrable de fermés de X.
4. Soit A et B deux parties non vides de X. Montrer que l'ensemble $U = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.
5. En déduire que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X, alors il existe deux parties U et V ouvertes et disjointes de X telles que $A \subset U$ et $B \subset V$.
6. *Lemme d'Urysohn.* Montrer que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X, alors il existe une application $f : X \to \mathbf{R}$ continue telle que

(i) pour tout $x \in A$, $f(x) = 0$,

(ii) pour tout $x \in B$, $f(x) = 1$,

(iii) pour tout $x \in X$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Indication : considérer f définie par $f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$.

Exercice 16. Pour toute suite réelle $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on note $A(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

1. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \emptyset$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a\}$.
3. Soit a_0 et a_1 deux réels. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a_0, a_1\}$.
4. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_p$ des réels. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a_0, \ldots, a_p\}$.
5. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \mathbf{N}$.
6. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \mathbf{R}$.

Exercice 17. $(\star)$ *Étude de la séparabilité des espaces $\ell^p(\boldsymbol{R})$*

1. Soit $p \in [1, +\infty[$.
   (a) Montrer que l'ensemble Z des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est dense dans $\ell^p(\mathbf{R})$.
   (b) En déduire que $\ell^p(\mathbf{R})$ est séparable.
2. Montrer que $\ell^\infty(\mathbf{R})$ n'est pas séparable. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser un argument diagonal.*

Indications.

Indications pour l'exercice 1. *Retour à l'énoncé.*

1. Montrer des inégalités : d'abord, $\sup A \leq \sup(A \cup B)$, $\sup B \leq \sup(A \cup B)$; puis $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$.

Indications pour l'exercice 2. *Retour à l'énoncé.*
Pour montrer qu'une application est une distance, on doit montrer qu'elle vérifie trois propriétés : séparation, symétrie, inégalité triangulaire.
Pour montrer qu'une application n'est pas une distance, on doit montrer que *l'une au moins* de ces trois propriétés n'est pas vérifiée. Commencer par écrire la négation de chacune des trois propriétés (attention aux quantificateurs).

Indications pour l'exercice 3. *Retour à l'énoncé.*

1. On vérifie que δ satisfait les trois propriétés : séparation, symétrie, inégalité triangulaire.
2. Il y a trois hypothèses à vérifier sur ϕ, commencer par les écrire en détails.

   Pour vérifier que d et δ définissent la même topologie, on peut utiliser l'une des deux caractérisations suivantes :
   - Pour tout $x \in X$, tout $r > 0$, il existe $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ tels que $B_d(x, \varepsilon_1) \subset B_\delta(x, r)$ et $B_\delta(x, \varepsilon_2) \subset B_d(x, r)$.
   - Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de X, tout $x \in X$, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers x dans (X, d) si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers x dans (X, δ).
3. On raisonnera par l'absurde, en supposant que d et δ sont Lipschitz-équivalentes. Commencer par écrire la définition de « d et δ sont Lipschitz-équivalentes ». Aboutir à une contradiction en utilisant le fait que d n'est pas bornée alors que δ l'est.

Indications pour l'exercice 4. *Retour à l'énoncé.*
Commencer par faire un dessin illustrant le résultat.
Écrire d'abord $\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| = \frac{1}{\|x\|\|y\|}\Big\|\|y\|(x-y) + (\|y\| - \|x\|)y\Big\|$, puis majorer.

Indications pour l'exercice 5. *Retour à l'énoncé.*
On montre le résultat suivant : $\alpha_n = \beta_n = c_n = 1$, $a_n = n$, $b_n = \sqrt{n}$, $\gamma_n = 1/\sqrt{n}$.
Pour cela, il faut commencer par vérifier que les inégalités sont satisfaites pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ avec ces constantes. Certaines sont assez directes. Pour l'une d'entre elles, on utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Ensuite, on peut trouver pour chacune des six inégalités des vecteurs non nuls pour lesquels il y a égalité. Cela prouvera l'optimalité des constantes.

Indications pour l'exercice 6. *Retour à l'énoncé.*

1. Pour chacune des deux normes, on vérifiera avec soin les trois propriétés.
2. Il faut prendre garde au fait que le "n" dans la définition des normes dépend de P.

Indications pour l'exercice 7. *Retour à l'énoncé.*

1. Le diamètre est défini avec un sup. Comment majore-t-on un sup ?
2. Peut-on écrire plus simplement $B(x, \frac{1}{2})$?

3. Soit $x \in E$ et $r > 0$. La question 1 montre que le diamètre de $B(x, r)$ et $B_f(x, r)$ est majoré par $2r$.

   On va montrer l'égalité dans le cas des evn. C'est plus facile dans le cas des boules fermées car le diamètre, qui est un sup, est atteint, c'est-à-dire qu'on peut trouver deux éléments y et z de $B_f(x, r)$ tels que $\|y - z\| = 2r$. Un dessin peut aider à trouver de tels éléments.

   Pour le cas des boules ouvertes, le diamètre n'est pas atteint : on construit des suites $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $B(x, r)$ telles que $\lim_{n\to+\infty} \|y_n - z_n\| = 2r$.

Indications pour l'exercice 8. *Retour à l'énoncé.*
Cet exercice est l'occasion de s'entraîner à rédiger avec soin dans un cadre relativement simple des preuves du type : « tel ensemble est ouvert », « tel ensemble est fermé » ...
Faites des dessins pour vous donner des idées.
Ce que vous pouvez utiliser : la définition d'un ouvert, d'un fermé, les caractérisations avec les suites. Et c'est tout !

Indications pour l'exercice 9. *Retour à l'énoncé.*
Mêmes conseils que pour l'exercice 8.

Indications pour l'exercice 10. *Retour à l'énoncé.*
Mêmes conseils que pour l'exercice 8.

Indications pour l'exercice 11. *Retour à l'énoncé.*

1. On veut montrer une inclusion, pour cela on se donne un élément quelconque du premier ensemble : soit $x \in A \cap \overline{B}$. Puis on écrit ce que signifient "$x \in A$ avec A ouvert" et "$x \in \overline{B}$". Et on quantifie aussi ce qu'on cherche à montrer ("$x \in \overline{A \cap B}$") pour savoir où on va.

   Pour un contre-exemple dans le cas où A n'est pas ouvert, prendre par exemple : $A = [0, 1]$ et $B =]1, 2]$.
2. Essayer avec des unions d'intervalles ouverts.

Indications pour l'exercice 13. *Retour à l'énoncé.*

1. Pour montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E, on prendra garde à manipuler proprement les sup. En particulier, pour prouver l'inégalité triangulaire, on commencera par écrire : pour tout $f, g \in E$, tout $x \in [0, 1]$, $|f(x) + g(x)| \leq \ldots$.

   Pour l'illustration graphique : fixer $f \in E$ et dessiner sa courbe représentative, puis indiquer la zone où se trouvent les courbes représentatives des fonctions g qui sont dans $B(f, r)$.
2. Utiliser les propriétés de l'intégrale.
3. Pour montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, on se donne $f \in E$ quelconque et on cherche $r > 0$ tel que pour tout $g \in B_{\|\cdot\|_\infty}(f, r) \subset A$. Pour déterminer un tel r, faire un dessin comme au-dessus.

   Pour montrer que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$, prendre pour f la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$ et construire (sur un dessin) pour tout $\varepsilon > 0$, une fonction g_ε telle que $\|g_\varepsilon - f\|_1 < \varepsilon$ et $g_\varepsilon \notin A$.
4. Pour montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

Indications pour l'exercice 14. *Retour à l'énoncé.*
Dans cet exercice, on manipule un espace de suites. Quand il faut considérer des suites de suites, il faut être soigneux·se avec les notations, on a donc choisi de noter $x(n)$ et non x_n les éléments de la suite x.

1. Montrer que $Y \subset X$, c'est montrer que toute suite réelle qui converge vers 0 est bornée.

2. Pour montrer que Y est fermé dans $(X, \|\cdot\|_\infty)$, on utilise la caractérisation séquentielle des fermés. On commence donc la preuve en écrivant : soit $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de Y qui converge vers x dans X. Qu'est-ce-que ça veut dire ? D'abord chaque x_k est un élément de Y donc une suite réelle qui converge vers 0 : à k fixé, $x_k = (x_k(n))_{n\in\mathbf{N}}$ et $\lim_{n\to\infty} x_k(n) = 0$. Ensuite, la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers x dans X : $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_\infty = 0$.

   On veut montrer que $x \in Y$. Commencer par écrire ce que cela veut dire et le quantifier.

3. D'abord, comment écrire qu'une suite réelle x est nulle à partir d'un certain rang ? Cela signifie qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x(n) = 0$.

   Pour montrer que Z est dense dans Y, on se donne $x \in Y$ quelconque puis on cherche à construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de Y (donc une suite de suites) qui converge vers x en norme infinie. On pourra définir pour tout k, x_k comme la suite réelle ayant les mêmes éléments que x jusqu'au rang k, et nulle à partir du rang $k+1$.

   Pour montrer que Z n'est pas dense dans X, on pourra considérer a la suite réelle constante égale à 1 et montrer que pour tout $x \in Z$, $\|a - x\|_\infty \geq 1$.

Indications pour l'exercice 15. *Retour à l'énoncé.*

1. Soit $x \in X$, $y \in X$. $d(x, A)$ et $d(y, A)$ sont définies avec des inf sur A : on commence par prendre un élément quelconque $a \in A$ pour écrire des inégalités triangulaires et ensuite faire intervenir les inf.

   On montre d'abord, $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ sans les valeurs absolues.

2. Écrire la quantification de $d(x, A) = 0$ en utilisant la caractérisation séquentielle de l'inf.

3. Soit U un ouvert de X, et $A = X \setminus U$. On note pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $F_n = \{x \in X : d(x, A) \geq \frac{1}{n}\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, F_n est fermé et que $U = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} F_n$.

4. Soit A et B deux parties non vides de X. Introduire $f : x \mapsto d(x, B) - d(x, A)$.

5. Utiliser la question précédente.

6. Vérifier que f définie par $f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$ convient (et que f est bien définie).