Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbf{R}$. Montrer l'égalité et l'inégalité suivantes :

1. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
2. si $A \cap B \neq \emptyset$, $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$.

Exercice 2. On définit, pour $j = 1, \ldots, 4$, l'application $d_j : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par

$$d_1(x,y) = (x-y)^2, \quad d_2(x,y) = |x - 2y|, \quad d_3(x,y) = \sqrt{|x-y|}, \quad d_4(x,y) = |x^2 - y^2|.$$

Parmi ces applications, la(les)quelle(s) défini(ssen)t une distance sur $\mathbf{R}$?

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit $\phi : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une application croissante s'annulant uniquement en 0 et sous-additive, *i.e.* : pour tout $(u,v) \in (\mathbf{R}^+)^2$, $\phi(u+v) \leq \phi(u) + \phi(v)$. Montrer que $\delta = \phi \circ d$ est une distance sur X.
2. (a) Montrer que la fonction $\phi : u \mapsto \dfrac{u}{1+u}$ satisfait les hypothèses de la question 1. Montrer que la distance $\delta = \phi \circ d$ a les propriétés suivantes :
   - δ est bornée ;
   - $\delta(x,y) = \delta(x',y')$ si et seulement si $d(x,y) = d(x',y')$;
   - δ définit la même topologie que d.

   (b) On considère le cas où $X = \mathbf{R}$ et d est la distance usuelle associée à la valeur absolue. Montrer que d et δ ne sont pas Lipschitz-équivalentes.

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x-y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes. On déterminera les meilleures constantes α_n, β_n, γ_n, a_n, b_n, c_n telles que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\alpha_n \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq a_n \|x\|_\infty, \quad \beta_n \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq b_n \|x\|_\infty, \quad \gamma_n \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_n \|x\|_1.$$

Exercice 6. Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbf{R}[X]$.
2. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 7.

1. Soit (X, d) un espace métrique, $r > 0$. Montrer que le diamètre de toute boule de rayon r dans X (ouverte ou fermée) est inférieur ou égal à $2r$.
2. Soit X un ensemble muni de la distance discrète. Quel est le diamètre de $B(x, \frac{1}{2})$ pour $x \in X$?
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Calculer le diamètre des boules (fermées et ouvertes) de E en fonction de leur rayon.

Exercice 8. Dans cet exercice, on munit $\mathbf{R}^2$ de la norme euclidienne. Les parties suivantes de $\mathbf{R}^2$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

a) $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ *b)* $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ *c)* $\{(x, x^2) : x \in \mathbf{R}\}$ *d)* $\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbf{N}^*\right\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0,\ xy \geq 0\}$ *f)* $\{(x, x^2) : x > 0\}$

Exercice 9. On munit $\mathbf{R}$ de la distance usuelle. Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties suivantes :

a) $\mathbf{Z}$ *b)* $]-1, 1[\cap \mathbf{Q}$ *c)* $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\right\}$ *d)* $\{e^x : x \in \mathbf{R}\}$.

Exercice 10. Dans la suite, $\mathbf{R}^2$ est muni de la distance euclidienne. On note $A = [0, 1[\times[0, 1[$.
Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse et justifier avec précision la réponse.

a) $(0, \frac{1}{2}) \in \overline{A}$ *b)* $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \in \mathring{A}$ *c)* $(1, 1) \in \overline{A}$ *d)* $(0, 0) \in \mathring{A}$.

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit A un ouvert de X et B une partie quelconque de X. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
   En utilisant des intervalles de $\mathbf{R}$, montrer que cette inclusion peut ne pas être vraie si A n'est pas ouvert.
2. Dans $\mathbf{R}$, donner des exemples d'ouverts A et B tels que les ensembles $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$ soient tous différents.

Exercice 12. *Topologie induite*
Soit $X = \{x \in \mathbf{R} : \sin x > 0\}$, muni de la distance induite $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$, $(x, y) \mapsto |x - y|$. On note $A =]0, \pi[$.

1. Étudier si A est un ouvert de (X, d).
2. Étudier si A est un fermé de (X, d).

Exercice 13. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$.

1. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
   Pour $f \in E$ et $r > 0$, représenter graphiquement $B(f, r)$.
2. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
3. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0, 1], f(x) > 0\}$. Montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
4. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0, 1], f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
5. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes sur E ?

Exercice 14. On considère $X = \ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Dans cet exercice, il est commode de noter une suite réelle x de la façon suivante :

$$x : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ n \mapsto x(n).$$

On munit X de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x(n)|$. On note $Y = \{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \lim_{n\to+\infty} x(n) = 0\}$.

1. Montrer que $Y \subset X$.
2. Montrer que Y est fermé dans $(X, \|\cdot\|_\infty)$.
3. On note Z l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que Z est dense dans Y mais que Z n'est pas dense dans X.

Exercice 15. *Distance à une partie*
Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie non vide A de X, on définit la distance à A par

$$d(\cdot, A) : X \to \mathbf{R},\ x \mapsto d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

1. Montrer que pour toute partie non vide A de X, l'application $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne, *i.e.* pour tout $x \in X$, $y \in X$, on a : $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
2. Soit A une partie non vide de X, $x \in X$. Montrer que x appartient à $\overline{A}$ si et seulement si on a $d(x, A) = 0$.
3. Montrer que tout ouvert de X peut s'écrire comme une réunion dénombrable de fermés de X.
4. Soit A et B deux parties non vides de X. Montrer que l'ensemble $U = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.
5. En déduire que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X, alors il existe deux parties U et V ouvertes et disjointes de X telles que $A \subset U$ et $B \subset V$.
6. *Lemme d'Urysohn.* Montrer que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X, alors il existe une application $f : X \to \mathbf{R}$ continue telle que
   (i) pour tout $x \in A$, $f(x) = 0$,
   (ii) pour tout $x \in B$, $f(x) = 1$,
   (iii) pour tout $x \in X$, $0 \leq f(x) \leq 1$.
   Indication : considérer f définie par $f(x) = \dfrac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$.

Exercice 16. Pour toute suite réelle $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, on note $A(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

1. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \emptyset$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a\}$.
3. Soit a_0 et a_1 deux réels. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a_0, a_1\}$.
4. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_p$ des réels. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a_0, \ldots, a_p\}$.
5. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \mathbf{N}$.
6. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \mathbf{R}$.

Exercice 17. ($\star$) *Étude de la séparabilité des espaces $\ell^p(\boldsymbol{R})$*

1. Soit $p \in [1, +\infty[$.
   (a) Montrer que l'ensemble Z des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est dense dans $\ell^p(\mathbf{R})$.
   (b) En déduire que $\ell^p(\mathbf{R})$ est séparable.
2. Montrer que $\ell^\infty(\mathbf{R})$ n'est pas séparable. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser un argument diagonal.*