Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2020-2021**

L3 - Mathématiques générales et applications | UE : Topologie et équations différentielles

---

Programme de révision pour le contrôle final du 5 janvier 2021

Toutes les définitions, tous les énoncés et tous les exemples du cours (voir le résumé ici) sont à connaître. Dans les notes de cours, cela correspond aux parties suivantes :

⋆ Topologie :
- Section 2.1 en entier.
- Section 2.2 jusqu'au théorème 2.19 (inclus)
- Dans la section 2.3, seule la définition 2.38 est à connaître, et l'exercice 2.39 à savoir faire, ainsi que les exercices 2.44 et 2.45.
- Section 2.4
- Section 2.6
- Section 2.7
- Section 3.1 en entier (sauf l'exemple 3.16).
- Section 3.2 : Théorème 3.21 (preuve par les suites faite au tableau, ou preuve des notes de cours), théorème 3.23.
- Section 3.3 : jusqu'au théorème 3.28 inclus.
- Section 3.4 en entier.
- Section 3.5 en entier.
- Chapitre 4 : sections 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 en entier.
- Chapitre 5 en entier.
- Chapitre 6 : section 6.1 jusqu'au théorème 6.10 inclus ; section 6.2 ; section 6.3 jusqu'à 6.23 inclus ; section 6.4 ; section 6.5 ; dans la section 6.6 seuls la définition 6.32 et l'énoncé du théorème 6.33 sont au programme.

⋆ Èquations différentielles :
- Chapitre 2 en entier.
- Chapitre 3 en entier.
- Chapitre 4 jusqu'à la fin de la section 4.6.
- Chapitre 6, section 6.1.

Les démonstrations suivantes sont à connaître :

1. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer les deux propriétés suivantes :
   — Une réunion quelconque d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).
   — Une intersection finie d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).
2. Montrer qu'une suite d'éléments d'un espace métrique a au plus une limite.
3. Soit (X, d) un espace métrique, $x \in X$, $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de (X, d) et que la boule fermée $B_f(x, r)$ est un fermé de (X, d).
4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$. Montrer que l'intérieur de la boule fermée $B_f(x, r)$ est égal à la boule ouverte $B(x, r)$.
5. Soit X un ensemble, d_1 et d_2 deux distances sur X. Montrer que si d_1 et d_2 sont Lipschitz-équivalentes alors elles définissent la même topologie sur X.

6. Soit (X, d) un espace métrique, A une partie de X, $x \in X$. Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de A qui converge vers x.
7. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue sur X si et seulement pour tout ouvert V de Y l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X.
8. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de X dans Y et $f : X \to Y$ une application. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f et si pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue sur X alors f est continue sur X.
9. Soit (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X. Montrer que la fonction $d(\cdot, A) : X \to \mathbf{R},\ x \mapsto d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$ est 1-lipchitzienne.
10. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :
    (i) f est continue sur E ;
    (ii) f est continue en 0_E ;
    (iii) il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$.
    (iv) f est lipschitzienne.
11. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F admet une structure d'espace vectoriel normé si on le munit de la norme subordonnée $|||\cdot|||$.
12. Soit (X, d) un espace métrique, A une partie compacte de X. Montrer que A est fermée.
13. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On munit le produit $X \times Y$ de la distance produit d_∞ définie par $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_X(x_1, x_1), d_Y(y_1, y_2))$. Montrer que si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont compacts alors $(X \times Y, d_\infty)$ est compact.
14. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$. Montrer que si X est compact et f continue alors $f(X)$ est un compact de Y.
15. *Théorème de Heine.* Soit (X, d_X) un espace métrique compact, (Y, d_Y) un espace métrique, et $f\colon X \to Y$ une fonction continue. Montrer que f est uniformément continue.
16. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé. Montrer que toute application linéaire $u : E \to F$ est continue (on pourra utiliser sans démonstration le fait que, sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes).
17. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie connexe de X. Montrer que $\overline{A}$ est connexe.
18. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que toute famille de parties connexes de X ayant deux à deux des intersections non vides a une réunion qui est connexe.
19. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$. Montrer que si X est connexe et f continue alors $f(X)$ est un connexe de Y.
20. Montrer que si (X, d) est connexe par arcs alors (X, d) est connexe.
21. Soit (X, d) un espace métrique, $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de X. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy et admet une valeur d'adhérence alors $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.
22. Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.
23. Soit (X, d) un espace métrique complet, $A \subset X$. Montrer que A est complet (pour la métrique induite) si et seulement si A est fermé.

24. Soit (X, d_X) un espace métrique et (Y, d_Y) un espace métrique complet. Montrer que l'ensemble $\{f\colon X \to Y\ , f$ est continue et bornée$\}$ est complet pour la distance $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$.

25. Soit (X, d) un espace métrique complet, $f : X \to X$ contractante (c'est-à-dire que f est k-lipschitzienne de rapport $k < 1$). Montrer que f admet un unique point fixe.

26. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application uniformément continue. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans X alors $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans Y.

27. *Lemme de Gronwall.* Soit I un intervalle, $t_0 \in I$, $a : I \to \mathbf{R}$ et $b : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On suppose que $u : I \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie
$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ u'(t) \leqslant a(t)u(t) + b(t).$$
Montrer qu'alors, on a
$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ u(t) \leqslant u(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{\int_\tau^t a(s)ds} d\tau.$$

28. Soit I un intervalle ouvert, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et $f : I \times U \to \mathbf{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que deux solutions maximales distinctes de l'équation différentielle associée à f ne peuvent se croiser.

29. Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ et borné. Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation différentielle associée à f sont globales.

30. Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ un champ de vecteurs continu, et globalement lipschitzien en la variable d'état. Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation différentielle associée à f sont globales.

31. Soit I un intervalle ouvert et $A : I \to \mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ une application continue. On note (H) l'équation différentielle : $y'(t) = A(t)y(t),\ t \in I$, et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions maximales de (H).
    (a) Montrer que toutes les solutions maximales de (H) sont définies sur I.
    (b) Montrer que $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbf{R}^d)$ de dimension d.

32. *Preuve de l'existence locale d'une solution.* Soit $d \in \mathbf{N}^*$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{R}^d$. Soit I un intervalle ouvert non vide, U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^d$, $(t_0, y_0) \in I \times U$, $f : I \times U \to \mathbf{R}^d$ une application continue. On suppose qu'il existe $\alpha_0 > 0$, $R_0 > 0$, $L > 0$ et $M > 0$ tels que $K = [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times B_f(y_0, R_0) \subset I \times U$ et
    — pour tout $(t, x) \in K,\ \|f(t,x)\| \leqslant M$,
    — pour tout $(t, x) \in K, (t, x') \in K,\ \|f(t,x) - f(t,x')\| \leqslant L\|x - x'\|$.
    On note $\alpha = \min(\alpha_0, \frac{R_0}{M}, \frac{1}{2L})$.
    Montrer qu'il existe une solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ définie sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.