Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2019-2020**

L3 - Mathématiques générales et applications UE : Topologie et équations différentielles

---

Programme de révision pour le contrôle du 12 novembre

Toutes les définitions, tous les énoncés et tous les exemples du cours au tableau sont à connaître jusqu'à ce qui a été traité en cours le 22/10/2020. Dans les notes de cours, cela correspond aux parties suivantes :

— Topologie :
  - Section 2.1 en entier.
  - Section 2.2 jusqu'au théorème 2.19 (inclus)
  - Dans la section 2.3, seule la définition 2.38 est à connaître, et l'exercice 2.39 à savoir faire, ainsi que les exercices 2.44 et 2.45.
  - Section 2.4
  - Section 2.6
  - Section 2.7
  - Section 3.1 en entier (sauf l'exemple 3.16).
  - Section 3.2 : Théorème 3.21 (preuve par les suites faite au tableau, ou preuve des notes de cours), théorème 3.23.
  - Section 3.3 : jusqu'au théorème 3.28 inclus.
  - Section 3.4 en entier.
  - Section 3.5 en entier.
  - Chapitre 4 : sections 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 en entier.

— Èquations différentielles :
  - Chapitre 2 en entier.
  - Chapitre 3 en entier.

Les démonstrations suivantes sont à connaître :

1. Montrer qu'une suite d'éléments d'un espace métrique a au plus une limite.
2. Soit (X, d) un espace métrique, $x \in X$, $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de (X, d) et que la boule fermée $B_f(x, r)$ est un fermé de (X, d).
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$. Montrer que l'intérieur de la boule fermée $B_f(x, r)$ est égal à la boule ouverte $B(x, r)$.
4. Soit X un ensemble, d_1 et d_2 deux distances sur X. Montrer que si d_1 et d_2 sont Lipschitz-équivalentes alors elles définissent la même topologie sur X.
5. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue sur X si et seulement pour tout ouvert V de Y l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X.
6. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de X dans Y et $f : X \to Y$ une application. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f et si pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue sur X alors f est continue sur X.
7. Soit (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X. Montrer que la fonction $d(\cdot, A) : X \to \mathbf{R},\ x \mapsto d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$ est 1-lipchitzienne.
8. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue sur E ;

(ii) f est continue en 0_E ;

(iii) il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq K\|x\|_E$.

(iv) f est lipschitzienne.

9. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F admet une structure d'espace vectoriel normé si on le munit de la norme subordonnée $\|\!|\cdot|\!\|$.

10. Soit (X,d) un espace métrique, A une partie compacte de X. Montrer que A est fermée.

11. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. On munit le produit $X \times Y$ de la distance produit d_∞ définie par $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(d_X(x_1,x_1), d_Y(y_1,y_2))$. Montrer que si (X,d_X) et (Y,d_Y) sont compacts alors $(X \times Y, d_\infty)$ est compact.

12. Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$. Montrer que si (X,d_X) est compact et f continue alors $f(X)$ est un compact de (Y,d_Y).

13. *Théorème de Heine.* Soit (X,d_X) un espace métrique compact, (Y,d_Y) un espace métrique, et $f\colon X \to Y$ une fonction continue. Montrer que f est uniformément continue.

14. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et F un espace vectoriel normé. Montrer que toute application linéaire $u : E \to F$ est continue (on pourra utiliser sans démonstration le fait que, sur un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes).

15. *Lemme de Gronwall.* Soit I un intervalle, $t_0 \in I$, $a : I \to \mathbf{R}$ et $b : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On suppose que $u : I \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie
$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ u'(t) \leq a(t)u(t) + b(t).$$
Montrer qu'alors, on a
$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ u(t) \leq u(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{\int_\tau^t a(s)ds}d\tau.$$

16. Soit I un intervalle ouvert, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et $f : I \times U \to \mathbf{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que deux solutions maximales distinctes de l'équation différentielle associée à f ne peuvent se croiser.

17. Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ et borné. Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation différentielle associée à f sont globales.

Les exercices de TD qu'il faut savoir faire sont tous ceux qui ont été traités avant les vacances de Toussaint.