
Programme de révision pour le contrôle du 29 septembre

Toutes les définitions, tous les énoncés et tous les exemples du cours sont à connaître jusqu'à ce qui a été traité en cours le 22/09/2020. Dans les notes de cours, cela correspond aux parties suivantes :

- Topologie :
  - Section 2.1 en entier.
  - Section 2.2 jusqu'au théorème 2.19 (inclus)
  - Dans la section 2.3, seule la définition 2.38 est à connaître, et l'exercice 2.39 à savoir faire, ainsi que les exercices 2.44 et 2.45.
  - Section 2.4
  - Section 2.6
  - Section 2.7
- Èquations différentielles :
  - Chapitre 2 en entier.
  - Chapitre 3 jusqu'au théorème 3.8 (inclus).

Les démonstrations suivantes sont à connaître :

1. Démontrer que, dans $\mathbf{R}$, toute suite croissante majorée converge (démonstration faite en cours au tableau, utilisant la notion de borne supérieure)
2. Montrer qu'une suite d'éléments d'un espace métrique a au plus une limite.
3. Montrer que, si une suite d'éléments d'un espace métrique est convergente, alors elle est bornée.
4. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer les deux propriétés suivantes :
   - Une réunion quelconque d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).
   - Une intersection finie d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).
5. Soit (X, d) un espace métrique, $x \in X$, $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(x, r)$ est un ouvert de (X, d) et que la boule fermée $B_f(x, r)$ est un fermé de (X, d).
6. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x \in E$, $r > 0$. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(x, r)$ est égale à la boule fermée $B_f(x, r)$.
7. Soit X un ensemble, d_1 et d_2 deux distances sur X. Montrer que si d_1 et d_2 sont Lipschitz-équivalentes alors elles définissent la même topologie sur X.
8. Soit (X, d) un espace métrique, A une partie de X, $x \in X$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   (a) $x \in \overline{A}$
   (b) Pour tout ouvert U tel que $x \in U$, on a $U \cap A \neq \emptyset$.
   (c) Il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.
9. *Lemme de Gronwall.* Soit I un intervalle, $t_0 \in I$, $a : I \to \mathbf{R}$ et $b : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions continues. On suppose que $u : I \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ u'(t) \leq a(t)u(t) + b(t).$$

Montrer qu'alors, on a

$$\forall t \in I \cap [t_0, +\infty[,\ u(t) \le u(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} b(\tau) e^{\int_{\tau}^{t} a(s)ds} d\tau.$$

10. Montrer que le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, & t \in \mathbf{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ a plusieurs solutions maximales.

Les exercices de TD qu'il faut savoir faire sont les exercices 1,2,3,4,5,6,7,13 de la feuille 1.