Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2020-2021**

L3 - Mathématiques générales et applications | UE : Topologie et équations différentielles

---

Programme de révision pour le contrôle du 20 octobre

Toutes les définitions, tous les énoncés et tous les exemples du cours au tableau sont à connaître jusqu'à ce qui a été traité en cours le 13/10/2020. Dans les notes de cours, cela correspond aux parties suivantes :

— Topologie :
  - Section 2.1 en entier.
  - Section 2.2 jusqu'au théorème 2.19 (inclus)
  - Dans la section 2.3, seule la définition 2.38 est à connaître, et l'exercice 2.39 à savoir faire, ainsi que les exercices 2.44 et 2.45.
  - Section 2.4
  - Section 2.6
  - Section 2.7
  - Section 3.1 en entier (sauf l'exemple 3.16).
  - Section 3.2 : Théorème 3.21 (preuve par les suites faite au tableau, ou preuve des notes de cours), théorème 3.23.
  - Section 3.3 : jusqu'au théorème 3.28 inclus.
  - Section 3.4 en entier.

  — Section 3.5 en entier.

  — Section 4.1 : Définitions 4.1, 4.3, 4.4 et 4.12 (sans preuve).

  — Section 4.2 : Jusqu'au théorème 4.20 (inclus) ; démonstrations par les suites.

— Èquations différentielles :
  - Chapitre 2 en entier.
  - Chapitre 3 en entier.

Les démonstrations suivantes sont à connaître :

1. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer les deux propriétés suivantes :
   — Une réunion quelconque d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).
   — Une intersection finie d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).
2. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application. Montrer que f est continue sur X si et seulement si pour tout ouvert V de Y l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X.
3. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications de X dans Y et $f : X \to Y$ une application. Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f et si pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est continue sur X alors f est continue sur X.
4. Soit (X, d) un espace métrique, A une partie non vide de X. Montrer que la fonction $d(\cdot, A) : X \to \mathbf{R},\ x \mapsto d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$ est 1-lipchitzienne.
5. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est continue sur E ;
   (ii) f est continue en 0_E ;

(iii) il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$.

(iv) f est lipschitzienne.

6. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F admet une structure d'espace vectoriel normé si on le munit de la norme $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$.
7. Soit (X, d) un espace métrique, A une partie compacte de X. Montrer que A est fermée.
8. Soit I un intervalle ouvert, U un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et $f : I \times U \to \mathbf{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que deux solutions maximales distinctes de l'équation différentielle associée à f ne peuvent se croiser.
9. Soit I un intervalle ouvert, et $f : I \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ et borné. Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation différentielle associée à f sont globales.

Les exercices de TD qu'il faut savoir faire sont : tous les exercices traités en TD sur les feuilles 1 et 2 ; les exercices 1,2,3,4,6,7,8 de la feuille 3.