Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2019-2020**

L3 - Mathématiques générales et applications — UE : Topologie et équations différentielles

---

Devoir n° 1

Le 29 septembre 2020

Durée : 45 minutes

NOM : .... **PRÉNOM :** ....

Question 1. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Donner la définition de l'adhérence de A.

Réponse. L'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés de (X, d) qui contiennent A.

Question 2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels à la fois croissante et majorée. Démontrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

Réponse. L'ensemble $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ non vide et majoré, et admet donc une borne supérieure, qu'on note M.
Soit $\varepsilon > 0$; puisque $M - \varepsilon$ ne majore pas $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $x_N > M - \varepsilon$.
Comme $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, on a $x_n \geq x_N$ pour tout $n \geq N$.
On vient d'établir que $M - \varepsilon < x_n$ pour tout $n \geq N$; puisque $x_n \leq M$ pour tout n par définition d'une borne supérieure, on a donc $M - \varepsilon < x_n \leq M$ pour tout $n \geq N$. On vient d'établir que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers M.

Question 3. Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X.
Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet au plus une limite.

Réponse. Supposons que x , y sont deux limites de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Fixons $\varepsilon > 0$.
Puisque (x_n) converge vers x, il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $d(x, x_n) \leq \varepsilon$.
De même, il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait $d(y, x_n) \leq \varepsilon$.
En posant $N = \max(N_1, N_2)$, on a à la fois $d(x_N, x) \leq \varepsilon$ et $d(x_N, y) \leq \varepsilon$, donc l'inégalité triangulaire permet d'établir que

$$d(x, y) \leq d(x, x_N) + d(x_N, y) \leq 2\varepsilon$$

Par conséquent, $d(x, y) \leq 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique que $x = y$.

Question 4. *Cas particulier du Lemme de Gronwall.* Soit $T > 0$ et $a : [0, T] \to \mathbf{R}$ une fonction continue.
On suppose que $u : [0, T] \to \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$\forall t \in [0, T],\ u'(t) \leq a(t)u(t).$$

Montrer qu'alors, on a

$$\forall t \in [0, T],\ u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t a(s)ds}.$$

Réponse. Pour simplifier la notation, posons pour $t \in [0, T]$ $A(t) = \int_0^t a(s)ds$; d'après le théorème fondamental de l'analyse, A est dérivable, et $A'(t) = a(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.
Posons $v(t) = u(t)e^{-A(t)}$; alors v est dérivable sur $[0, T]$, et on a pour tout $t \in [0, T]$

$$v'(t) = (u'(t) - A'(t)u(t))e^{-A(t)} = (u'(t) - a(t)u(t))e^{-A(t)}$$

Par hypothèse, $u'(t) - a(t)u(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, et $e^{-A(t)} \geq 0$; donc $v'(t) \leq 0$ pour tout $t \in [0, T]$.
Par conséquent, v est décroissante sur $[0, T]$, donc $v(t) \leq v(0) = u(0)$; on vient d'établir que sur $[0, T]$ on a l'inégalité $u(t)e^{-A(t)} \leq u(0)$, autrement dit $u(t) \leq u(0)e^{\int_0^t a(s)ds}$.

Question 5. On considère l'espace $E = C([0,1], \mathbf{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles. Pour $f \in E$, on pose
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \ , \quad N(f) = \sup_{x\in[0,1]} \left(|f(x)| + \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right).$$
On admet que $\|\cdot\|_\infty$ et N sont des normes sur E. Ces normes sont-elles équivalentes ?

Réponse. Pour tout $x \in [0,1]$, on a
$$|f(x)| \leq |f(x)| + \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leq N(f)$$
Par conséquent, $N(f)$ est un majorant de $\{|f(x)| \colon x \in [0,1]\}$, et donc $\|f\|_\infty \leq N(f)$.
Par ailleurs, pour tout $x \in X$ on a à la fois $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ et $\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leq \|f\|_\infty$, donc
$$|f(x)| + \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leq 2\|f\|_\infty$$
Il s'ensuit que $N(f) \leq 2\|f\|_\infty$. Finalement, $\|f\|_\infty \leq N(f) \leq 2\|f\|_\infty$: ces deux normes sont équivalentes.

Question 6. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé tel que $E \neq \{0\}$. Soit $x, y \in E$ avec $x \neq y$ et $r, R > 0$. Montrer que
$$\|x-y\| \leq R - r \Longleftrightarrow B_f(x,r) \subseteq B_f(y,R).$$
On pourra s'aider d'un dessin.

Réponse. Supposons que $\|x-y\| \leq R-r$, et considérons $z \in B_f(x,r)$. Alors on a
$$\|z-y\| \leq \|z-x\| + \|x-y\| \leq r + (R-r) = R$$
Donc $z \in B_f(x,R)$, et on a prouvé comme attendu que $B_f(x,r) \subseteq B_f(y,R)$.
Réciproquement, supposons que $B_f(x,r) \subseteq B_f(y,R)$. Considérons
$$z = x + r\frac{x-y}{\|x-y\|}$$
(notons que z est bien défini, car on a supposé $x \neq y$ et donc $\|x-y\| \neq 0$).
Alors on a $\|z-x\| = r$, donc $z \in B_f(x,r)$, ce qui entraîne sous nos hypothèses que $\|z-y\| \leq R$. Or, on a
$$\begin{aligned}
\|z-y\| &= \left\|x-y+r\frac{x-y}{\|x-y\|}\right\| \\
&= \left\|(x-y)\left(1+\frac{r}{\|x-y\|}\right)\right\| \\
&= \|x-y\|\left(1+\frac{r}{\|x-y\|}\right) \\
&= \|x-y\| + r
\end{aligned}$$
Puisque $\|z-y\| \leq R$, on doit avoir $\|x-y\| + r \leq R$, autrement dit $\|x-y\| \leq R-r$.