Feuille 3 : Dérivabilité

Exercice 3-1 Pour chacune des expressions $f(x)$ ci-dessous, calculer $f'(x)$:

1. $x^4 + 3x^2 - 6$
2. $6x^{7/2} + 4x^{5/2} - 2x$
3. $\sqrt{3x} + \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x}$
4. $x\,e^x$
5. $x^2\,e^x$
6. $x\,(x+3)\,e^x$
7. $x\,\sin x\,\ln x$
8. $\dfrac{5-x}{5+x}$
9. $\dfrac{x^3}{1+x^2}$
10. $\dfrac{x^3+1}{x^2-x-2}$
11. $\dfrac{\ln x}{x^3}$
12. $\dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{x}}$
13. $\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}$
14. $\dfrac{\cos x}{\sin x}$
15. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$.

Exercice 3-2 Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, calculer la fonction dérivée f' :

1. e^{3x}
2. $\cos(5x)$
3. $\ln(2x)$
4. $\ln(|2x|)$
5. $\ln(-2x)$
6. $(1-x)^{7/3}$
7. $\sin(\cos x)$
8. $\sin(\cos(3x))$
9. $\ln(\sin^2 x)$
10. $\sqrt[3]{x^2+x+1}$
11. e^{-x^2}
12. $2^{\ln x}$
13. $\dfrac{\sqrt{5+4x}}{1+2\sqrt{1+x}}$
14. $\ln(|e^{2\imath\pi x}|)$.

Exercice 3-3

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & \text{si } x < 0 \\ \cos^2(\pi x), & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}. \tag{1}$$

2. Même question avec $f(x) = \sqrt{|x|}$.

Exercice 3-4 Préciser pour chacune des fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en quels points elles sont dérivables, dérivables à droite, dérivables à gauche, et les valeurs de leurs dérivées, dérivées à droite, dérivées à gauche.

1. $f(x) = \cos(\cos x)$.
2. $h(x) = \sqrt{1+\cos x}$.
3. $f(x) = \sqrt{|\sin x|}$.

Exercice 3-5 Soit f la fonction réelle d'une variable réelle définie par :

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x + \exp(-1/x^2), & \text{si } x > 0 \\ \sin x, & \text{si } x \le 0 \end{cases} \end{array}.$$

1. Montrer que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$ en calculant sa dérivée.
2. f est-elle dérivable en 0 ?
3. f' est elle continue en 0 ?
4. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 3-6 Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Pour quelles valeurs de n,

1. f_n est-elle continue ?
2. f_n est-elle dérivable ?
3. f'_n est-elle continue ?
4. f'_n est-elle dérivable ?

Exercice 3-7

1. Montrer que pour tous réels a et b avec $0 \leq a < b$:
$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}.$$
2. En déduire que :
$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Exercice 3-8

1. Montrer que pour tous réels x et y : $|\cos y - \cos x| \leq |y - x|$.
2. Montrer que pour tous réels x et y tels que $x \neq y$: $|\cos y - \cos x| < |y - x|$.

Exercice 3-9

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$: $0 < \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} H_n$ où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3-10

1. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que pour $\alpha \leq 1$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \infty.$$
2. On suppose maintenant $\alpha > 1$. Pour $k \geq 2$, comparer $\dfrac{\alpha - 1}{k^\alpha}$ et $\dfrac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{k^{\alpha-1}}$.
3. Toujours pour $\alpha > 1$, montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \ell, \text{ avec } \ell < \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Exercice 3-11 Soit f de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ une fonction trois fois dérivable.

1. On suppose que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ et que $f(1) = 0$. Montrer que f''' s'annule sur l'intervalle $]0,1[$.
2. On suppose ici que $f(0) = f(1/3) = f(2/3) = f(1) = 0$. Montrer le même résultat.
3. On suppose ici que $f(0) = f'(0) = 0$ et que $f(1) = f'(1) = 0$. Montrer le même résultat.

Exercice 3-12 Montrer que $100 + \dfrac{1}{200}$ est une approximation par excès de $\sqrt{10001}$, et que l'erreur d'approximation est inférieure à $\dfrac{1}{4 \cdot 10^6}$.

Exercice 3-101 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a\,f(x) - x\,f(a)}{x - a}$, pour un $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3-102 Montrer que la fonction P de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $P(x) = x^{100} + ax^7 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ a au plus 4 racines réelles.

Exercice 3-103 On définit
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(1+x^2) - \arctan x \end{array}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)} = P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n qui satisfait les identités
   (a) $P_1(x) = 2x - 1$,
   (b) $P_{n+1}(x) = (x^2+1)P_n'(x) - 2xP_n(x)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n a n racines distinctes.

Exercice 3-104 Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Montrer que f est dérivable à droite en a et $f'(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$, en supposant que cette limite est finie.

Exercice 10-105 Soient $a < b$ deux réels. Existe-t-il une fonction dérivable f de $[a, b[$ vers $\mathbb{R}$ telle que l'on ait simultanément le comportement asymptotique $\lim_{x \to b-} f(x) = \infty$ et la majoration $|f'| \leq 1$?

Exercice 3-106 Soit f de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ une application continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
On suppose que f est dérivable en 0 et en 1 et que l'on a $f'(0) = f'(1) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un α dans $]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. [Indication : étudier la fonction $g(x) := f(x) - x$.]
2. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un β dans $]0, 1[$ tel que $|f''(\beta)| \geq 4$. [Indication : raisonner par l'absurde et étudier les fonctions $x \mapsto f(x) - 2\,x^2$ et $x \mapsto 1 - f(x) - 2\,(1-x)^2$.]

Exercice 3-107 Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x - x$.

1. En appliquant à f le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln n \leq f(n+1) - f(n) \leq \ln(n+1).$$
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n \leq f(n+1) + 1 \leq \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln(n+1).$$
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a :
$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$