Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021

Algèbre III - Licence de mathématiques générales et applications L2

Feuille d'exercices n° 7

Puissances d'une matrice

Exercice 1. Calculer les puissances A^n, $n \geq 0$, de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Indication : On pourrait trigonaliser A. D'une manière alternative on pourrait réaliser que $A = D + N$ avec D diagonal, N nilpotent et $DN = ND$.

Exercice 2. Calculer les puissances A^n, $n \in \mathbb{Z}$, de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Attention : Décomposer $A = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne va pas aboutir, bienque N est nilpotent. Pourquoi ? Il faut alors suivre l'algorithme à la fin du chapitre 6 pour obtenir une autre forme triangulaire.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Calculer $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Indication : Calculer les puissances de A et utiliser le résultat suivant (admis) : Si $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ est une suite de matrices t.q. $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, $\lim_{n\to+\infty} c_n = c$, $\lim_{n\to+\infty} d_n = d$ alors $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Exercice 4. On considère la suite définie par $u_0 = 2u_1 = 2$ et pour $n \geq 2$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

1. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, déterminer la matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 2$, $X_{n+1} = A \cdot X_n$.
2. Déterminer une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $P^{-1}AP = T$.
3. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n.
4. Déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 5. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$$