Feuille d'exercices n^{o} 6

Trigonalisation et endomorphisme nilpotent

Exercice 1. Pour chacune des matrices

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&1&-2\\3&-1&-2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}4&-1&0&0\\4&0&0&0\\0&0&0&4\\0&0&-1&4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-2&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}13&-5&-2\\-2&7&-8\\-5&4&7\end{pmatrix}$$

1. Déterminer un polynôme annullateur et en déduire les valeurs propres.
2. Trouver une matrice triangulaire T et une matrice inversible P t.q. $T = P^{-1}AP$.

Indication : Suivre l'algorithm décrit dans les notes du cours, chapitre 7.

Exercice 2. Soit h un endomorphisme nilpotent d'une espace vectoriel de dimension n. On suppose que le noyau $\ker h$ est de dimension 1.

1. Quelles sont les valeurs propres de h ? Quelles sont leurs multiplicité algébrique et géométrique ?
2. Montrer que $\dim \ker h^k = k$ pour $0 \leq k \leq n$.

   Indication : On montre d'abord que $\mathrm{rg} h^{k+1} \geq \mathrm{rg} h^k - 1$.
3. En déduire l'indice de nilpotence de h.

Exercice 3. Soit A une matrice nilpotente de taille 3×3. On suppose que l'indice de nilpotence de A est 2.

1. Montrer que la dimension du noyau de A est 2.

   Indication : On pourrait oontrer par adsurde que la dimension du noyau de A ne peut pas être $0, 1$ *ou* 3.
2. En déduire qu'il existe une matrice P inversible t.q.

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Indication : Il faut trouver une base (b_1, b_2, b_3) t.q. b_1, b_2 sont dans le noyau de A et $Ab_3 = b_1$.