Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2019-2020**

L3 - Mathématiques générales et applications UE : Topologie et équations différentielles

---

Feuille d'exercices n° 8

Exercice 1. *Espèces en compétition*

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)\big(1 - x(t) - 2y(t)\big), \\ y'(t) &= 2y(t)\big(1 - 2x(t) - y(t)\big), \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

1. Déterminer les points d'équilibre du système (1) et étudier leur stabilité.
2. Esquisser un portrait de phase du système (1).

Exercice 2. *Pendule simple et pendule amorti*

L'équation du pendule simple est

$$x''(t) + \sin\big(x(t)\big) = 0, \ t \in \mathbf{R} \tag{2}$$

et celle du pendule amorti

$$x''(t) + kx'(t) + \sin\big(x(t)\big) = 0, \ t \in \mathbf{R} \tag{3}$$

où $k > 0$.

On réécrit ces équations du second ordre sous la forme de systèmes de deux équations du premier ordre :

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\sin\big(x(t)\big) \end{cases} \tag{4}$$

et

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ v'(t) = -kv(t) - \sin\big(x(t)\big) \end{cases} \tag{5}$$

avec les conditions initiales $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$, où x_0 et v_0 sont deux réels donnés.

On souhaite étudier le comportement des solutions de ces deux systèmes.

1. *Cas du pendule simple.*
   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution globale (définie sur $\mathbf{R}$ tout entier) au système (4) pour toute donnée initiale (x_0, v_0).
   (b) Déterminer les points d'équilibre de (4).
   (c) Soit (x^*, v^*) un équilibre. Peut-on conclure quant à la stabilité de cet équilibre en étudiant le système linéarisé en ce point ?
   (d) On note pour tout $(x, v) \in \mathbf{R}^2$, $H(x, v) = \dfrac{1}{2}v^2 + 1 - \cos x$.
   Montrer que si $t \mapsto (x(t), v(t))$ est solution de (4), $t \mapsto H(x(t), v(t))$ est constante. Autrement dit, H est une intégrale première pour (4).
   (e) Tracer le portrait de phase du pendule simple. *On pourra étudier les ensembles de niveau de H : $\mathcal{E}_a = \{(x, v) \in \boldsymbol{R}^2 \mid H(x, v) = a\}$ pour $a \in \boldsymbol{R}$.*
   (f) Décrire le comportement des solutions de (4) en fonction de la valeur initiale de l'hamiltonien $H(x_0, v_0)$.

2. *Cas du pendule amorti.*

   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution globale (définie sur $\mathbf{R}$ tout entier) au système (5) pour toute donnée initiale (x_0, v_0).

   (b) Montrer que si $t \mapsto (x(t), v(t))$ est solution de (5), alors $t \mapsto H(x(t), v(t))$ est décroissante.

   (c) Montrer que l'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable pour (5), *i.e.* pour des données initiales (x_0, v_0) dans un voisinage de $(0, 0)$, les solutions associées $(x(t), v(t))$ convergent vers $(0, 0)$ quand $t \to +\infty$.

   (d) Montrer que le système (5) n'admet pas de solutions périodiques non constantes.