Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2019-2020**

L3 - Mathématiques générales et applications — UE : Topologie et équations différentielles

---

Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Pour chacune des équations suivantes, déterminer l'ensemble des solutions maximales, puis la solution satisfaisant de plus $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.

1. $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = 0,\ t \in \mathbf{R}$.
2. $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0,\ t \in \mathbf{R}$.
3. $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0,\ t \in \mathbf{R}$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des solutions maximales des équations suivantes :

1. $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = e^{2t},\ t \in \mathbf{R}$.
2. $x''(t) + 2x'(t) - 3x(t) = e^{t},\ t \in \mathbf{R}$.

Exercice 3. Dans les trois cas suivants, déterminer l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle $y'(t) = Ay(t),\ t \in \mathbf{R}$:

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas (i), déterminer la solution vérifiant $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $\omega_0 > 0$, $c \in \mathbf{R}^*$. Soit $\omega > 0$ tel que $\omega \neq \omega_0$. On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$(E_\omega) \quad y''(t) + \omega_0^2 y(t) = c \sin(\omega t),\ t \in \mathbf{R}.$$

Cette équation modélise le mouvement d'un corps attaché à un ressort élastique sous l'action d'une force périodique de pulsation ω, en l'absence de frottement ; $y(t)$ représente la position du corps à l'instant t.

1. Déterminer une solution particulière z_ω de (E_ω).
2. Donner toutes les solutions de (E_ω).
3. Déterminer la solution y_ω de (E_ω) vérifiant $y_\omega(0) = 1$ et $y'_\omega(0) = \dfrac{c\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$.
4. Montrer que $\lim\limits_{\omega \to \omega_0} \left(\sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |y_\omega(t)| \right) = +\infty$. Ce phénomène est appelé *résonance*.

Exercice 5. Soit $q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et intégrable, *i.e.* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |q(t)| dt < \infty$.
On considère l'équation différentielle linéaire :

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0,\ t \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

1. Réécrire l'équation (1) sous la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 en dimension 2 : $X'(t) = A(t)X(t),\ t \in \mathbf{R}$, où $A : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

2. Justifier que toute solution maximale de (1) est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier, puis donner la structure de l'ensemble des solutions maximales de (1).
3. Soit (x_1, x_2) un système fondamental de solutions de (1). On définit leur wronskien w par : pour tout $t \in \mathbf{R}$, $w(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t)$.

   Faire le lien avec la notion de wronskien pour le système différentiel de la question 1. Écrire l'équation différentielle satisfaite par w.
4. Soit $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une solution bornée de (1). Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} x'(t) = 0$.
5. Montrer que l'équation (1) admet des solutions non bornées. *Indication : on pourra considérer un système fondamental de solutions et leur wronskien.*

Exercice 6. Soit $\theta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\theta(t)|dt < \infty$.
On considère l'équation différentielle linéaire :

$$x''(t) + (1 + \theta(t))x(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

On suppose que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une solution de (2). On pose pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$g(t) = f(t) + \int_0^t \theta(s)f(s)\sin(t - s)ds.$$

1. Vérifier que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $g''(t) + g(t) = 0$.
2. En déduire qu'il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $t \geq 0$, $|f(t)| \leq A + \displaystyle\int_0^t |\theta(s)| \cdot |f(s)|ds$.
3. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

Exercice 7. Soit $u \in \mathbf{R}^3$ tel que $\|u\|_2 = 1$. Pour deux vecteurs x et y dans $\mathbf{R}^3$, on note $x \cdot y$ leur produit scalaire (canonique). On rappelle la définition du produit vectoriel de deux vecteurs x et y dans $\mathbf{R}^3$: $x \wedge y$ est le vecteur de $\mathbf{R}^3$ tel que pour tout $z \in \mathbf{R}^3$, $\det(x, y, z) = (x \wedge y) \cdot z$; le vecteur $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y. De plus, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, alors on a aussi $x \wedge y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$.
On considère l'équation différentielle

$$x'(t) + u \wedge x(t) = 0, \; t \in \mathbf{R} \tag{3}$$

où $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$.

1. Soit $x_0 \in \mathbf{R}^3$. Justifier que l'équation (3) admet une unique solution maximale vérifiant $x(0) = x_0$ et que cette solution est définie sur $\mathbf{R}$. On note x cette solution.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\|x(t)\|_2 = \|x_0\|_2$.
3. Montrer que l'application $t \mapsto x(t) \cdot u$ est constante sur $\mathbf{R}$.
4. Réécrire (3) sous la forme $x'(t) = Ax(t)$.
5. Calculer explicitement la solution dans le cas $u = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dessiner la trajectoire dans un repère de $\mathbf{R}^3$.
6. Donner l'expression de x dans le cas général.

Exercice 8. *Deux équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*

1. *En dimension 1.* Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et T-périodique (avec $T > 0$). On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire suivante
$$u'(t) = f(t)u(t), \ t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$
   (a) *Préliminaire.* On note F une primitive de f sur $\mathbf{R}$.
      i. Montrer que F est T-périodique si et seulement si $\displaystyle\int_0^T f(t)dt = 0$.
      ii. Montrer que F est bornée sur $\mathbf{R}$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^T f(t)dt = 0$.

   (b) Donner la forme des solutions de (4). En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que les solutions de (4) soient toutes bornées.

   (c) Dans cette question, on cherche à retrouver ce résultat par une autre méthode.
      i. Trouver $b \in \mathbf{R}$ et $q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{+*}$ une application continue et T-périodique telle que u est solution de (4) si et seulement si $v : t \mapsto q(t)u(t)$ est solution de $v' = bv$.
      ii. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que les solutions de (4) soient toutes bornées.

2. *En dimension 2.* On considère le système différentiel $u'(t) = A(t)u(t)$ où pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$
   (a) Soit $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ une solution de $u'(t) = A(t)u(t)$. Trouver une équation différentielle satisfaite par $r : t \mapsto r(t) = \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2}$ où $(u_1(t), u_2(t))$ sont les composantes de $u(t)$.

   (b) En déduire que les solutions de $u'(t) = A(t)u(t)$ sont toutes bornées sur $\mathbf{R}$.

Exercice 9. $(\star)$ *Une autre équation différentielle linéaire à coefficients périodiques en dimension 2*
On considère le système différentiel $u'(t) = A(t)u(t)$ où pour tout $t \in \mathbf{R}$
$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et une application $Q : \mathbf{R} \to \mathcal{O}_2(\mathbf{R})$ 4π-périodique (où $\mathcal{O}_2(\mathbf{R})$ est le groupe des matrices orthogonales réelles de dimension 2) telles que pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$A(t) = Q(t)MQ(t)^T.$$
2. Soit u une solution de $u'(t) = A(t)u(t)$ et soit $v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2, \ t \mapsto v(t) = Q(t)^T u(t)$. Montrer que v est solution d'un système linéaire à coefficients constants $v' = Bv$, où $B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est une matrice que l'on déterminera.
3. Réciproquement, soit v une solution de $v' = Bv$. Montrer que $u : t \mapsto Q(t)v(t)$ est solution de $u'(t) = A(t)u(t)$.
4. Les solutions de $u'(t) = A(t)u(t)$ sont-elles bornées sur $\mathbf{R}^+$? sur $\mathbf{R}^-$? sur $\mathbf{R}$?
Indication : on pourra étudier le spectre de B.

L'étude menée dans les exercices 8 et 9 sur des cas particuliers en dimension $d \leq 2$ peut être généralisée à une dimension d quelconque. On a en effet les deux résultats suivants, connus sous le nom de théorèmes de Floquet-Lyapunov.

Théorème 1 : *Soit $A : \boldsymbol{R} \to \mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$ une application T-périodique. Il existe une application T-périodique $Q : \boldsymbol{R} \to GL_n(\boldsymbol{C})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$ telles que u est solution de $u'(t) = A(t)u(t)$ si et seulement si $v : t \mapsto Q(t)u(t)$ est solution de $v'(t) = Bv(t)$.*

Théorème 2 : *Soit $A : \boldsymbol{R} \to \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ une application T-périodique. Il existe une application $2T$-périodique $Q : \boldsymbol{R} \to GL_n(\boldsymbol{R})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ telles que u est solution de $u'(t) = A(t)u(t)$ si et seulement si $v : t \mapsto Q(t)u(t)$ est solution de $v'(t) = Bv(t)$.*

Exercice 10. ($\star$)

1. Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $A : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une application T-périodique. On considère l'équation linéaire $u'(t) = A(t)u(t)$ et sa matrice fondamentale $\Phi : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\Phi(0) = I_n$.
   (a) Montrer que $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.
   (b) Montrer qu'il existe une solution T-périodique *non identiquement nulle* à l'équation différentielle $u'(t) = A(t)u(t)$ si et seulement si la matrice $\Phi(T)$ admet 1 comme valeur propre.
2. On se place dans le cas complexe ($\mathbf{K} = \mathbf{C}$). On admet le résultat suivant :

   Pour tout $C \in GL_n(\boldsymbol{C})$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{C})$ tel que $e^B = C$.

   (a) Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $e^{TB} = \Phi(T)$.
   (b) Soit $Q(t) = e^{tB}\Phi(t)^{-1}$. Montrer que Q est T-périodique.
   (c) En déduire une preuve du Théorème 1.
3. On se place dans le cas réel ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$). On admet le résultat suivant :

   Pour tout $C \in GL_n(\boldsymbol{R})$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\boldsymbol{R})$ tel que $e^B = C^2$.

   (a) Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $e^{2TB} = \Phi(T)^2$.
   (b) En s'inspirant du cas complexe, donner la preuve du Théorème 2.
4. On admet le résultat suivant :

   Soit $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ ou $\boldsymbol{C}$. Si $C \in GL_n(\boldsymbol{K})$ s'écrit $C = e^B$, alors les valeurs propres de C coïncident avec les exponentielles des valeurs propres de B, avec les mêmes multiplicités.

   Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur la matrice $\Phi(T)$ pour que les solutions de $u'(t) = A(t)u(t)$ soient bornées sur $\mathbf{R}^+$, *resp.* sur $\mathbf{R}^-$, *resp.* sur $\mathbf{R}$.