
Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit A et B deux parties non vides et majorées de \mathbf{R} . Montrer l'égalité et l'inégalité suivantes :

1. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,
2. si $A \cap B \neq \emptyset$, $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$.

Exercice 2. On définit, pour $j = 1, \dots, 4$, l'application $d_j : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$d_1(x, y) = (x - y)^2, \quad d_2(x, y) = |x - 2y|, \quad d_3(x, y) = \sqrt{|x - y|}, \quad d_4(x, y) = |x^2 - y^2|.$$

Parmi ces applications, la(les)quelle(s) défini(ssen)t une distance sur \mathbf{R} ?

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit $\phi : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ une application croissante s'annulant uniquement en 0 et sous-additive, *i.e.* : pour tout $(u, v) \in (\mathbf{R}^+)^2$, $\phi(u + v) \leq \phi(u) + \phi(v)$. Montrer que $\delta = \phi \circ d$ est une distance sur X .
2. (a) Montrer que la fonction $\phi : u \mapsto \frac{u}{1 + u}$ satisfait les hypothèses de la question 1. Montrer que la distance $\delta = \phi \circ d$ a les propriétés suivantes :
 - δ est bornée ;
 - $\delta(x, y) = \delta(x', y')$ si et seulement si $d(x, y) = d(x', y')$;
 - δ définit la même topologie que d .(b) On considère le cas où $X = \mathbf{R}$ et d est la distance usuelle associée à la valeur absolue. Montrer que d et δ ne sont pas Lipschitz-équivalentes.

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbf{K} ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C}). Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$, on a

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x - y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbf{R}^n sont équivalentes. On déterminera les meilleures constantes $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, a_n, b_n, c_n$ telles que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\alpha_n \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq a_n \|x\|_\infty, \quad \beta_n \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq b_n \|x\|_\infty, \quad \gamma_n \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_n \|x\|_1.$$

Exercice 6. Pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbf{R}[X]$.
2. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 7.

1. Soit (X, d) un espace métrique, $r > 0$. Montrer que le diamètre de toute boule de rayon r dans X (ouverte ou fermée) est inférieur ou égal à $2r$.
2. Soit X un ensemble muni de la distance discrète. Quel est le diamètre de $B(x, \frac{1}{2})$ pour $x \in X$?
3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Calculer le diamètre des boules (fermées et ouvertes) de E en fonction de leur rayon.

Exercice 8. Dans cet exercice, on munit \mathbf{R}^2 de la norme euclidienne. Les parties suivantes de \mathbf{R}^2 sont-elles ouvertes ? fermées ?

$$\begin{array}{llll}
 a) \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} & b) \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} & c) \{(x, x^2) : x \in \mathbf{R}\} & d) \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) : n \in \mathbf{N}^* \right\} \\
 e) \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, xy \geq 0\} & f) \{(x, x^2) : x > 0\} & &
 \end{array}$$

Exercice 9. On munit \mathbf{R} de la distance usuelle. Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties suivantes :

$$a) \mathbf{Z} \quad b)]-1, 1[\cap \mathbf{Q} \quad c) \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^* \right\} \quad d) \{e^x : x \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice 10. Dans la suite, \mathbf{R}^2 est muni de la distance euclidienne. On note $A = [0, 1[\times]0, 1[$. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse et justifier avec précision la réponse.

$$a) (0, \frac{1}{2}) \in \bar{A} \quad b) (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}) \in \overset{\circ}{A} \quad c) (1, 1) \in \bar{A} \quad d) (0, 0) \in \overset{\circ}{A}.$$

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit A un ouvert de X et B une partie quelconque de X . Montrer que $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.
En utilisant des intervalles de \mathbf{R} , montrer que cette inclusion peut ne pas être vraie si A n'est pas ouvert.
2. Dans \mathbf{R} , donner des exemples d'ouverts A et B tels que les ensembles $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B}$ soient tous différents.

Exercice 12. *Topologie induite*

Soit $X = \{x \in \mathbf{R} : \sin x > 0\}$, muni de la distance induite $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}^+$, $(x, y) \mapsto |x - y|$. On note $A =]0, \pi[$.

1. Étudier si A est un ouvert de (X, d) .
2. Étudier si A est un fermé de (X, d) .

Exercice 13. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} .

1. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .
Pour $f \in E$ et $r > 0$, représenter graphiquement $B(f, r)$.
2. Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .
3. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0, 1], f(x) > 0\}$. Montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
4. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0, 1], f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
5. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes sur E ?

Exercice 14. On considère $X = \ell^\infty(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Dans cet exercice, il est commode de noter une suite réelle x de la façon suivante :

$$x : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$n \mapsto x(n).$$

On munit X de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x(n)|$. On note $Y = \{x \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} : \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = 0\}$.

1. Montrer que $Y \subset X$.
2. Montrer que Y est fermé dans $(X, \|\cdot\|_\infty)$.
3. On note Z l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que Z est dense dans Y mais que Z n'est pas dense dans X .

Exercice 15. Pour toute suite réelle $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on note $A(x)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

1. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \emptyset$.
2. Soit $a \in \mathbf{R}$. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a\}$.
3. Soit a_0 et a_1 deux réels distincts. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a_0, a_1\}$.
4. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ et a_0, \dots, a_p des réels distincts. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \{a_0, \dots, a_p\}$.
5. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \mathbf{N}$.
6. Construire une suite réelle x telle que $A(x) = \mathbf{R}$.

Exercice 16. *Distance à une partie*

Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie non vide A de X , on définit la distance à A par

$$d(\cdot, A) : X \rightarrow \mathbf{R}, \quad x \mapsto d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

1. Montrer que pour toute partie non vide A de X , l'application $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne, *i.e.* pour tout $x \in X, y \in X$, on a

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

2. Soit A une partie non vide de $X, x \in X$. Montrer que x appartient à \bar{A} si et seulement si on a $d(x, A) = 0$.
3. Montrer que tout ouvert de X peut s'écrire comme une réunion dénombrable de fermés de X .
4. Soit A et B deux parties non vides de X . Montrer que l'ensemble $U = \{x \in X : d(x, A) < d(x, B)\}$ est ouvert.
5. En déduire que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X , alors il existe deux parties U et V ouvertes et disjointes de X telles que $A \subset U$ et $B \subset V$.
6. *Lemme d'Urysohn.* Montrer que si A et B sont deux parties fermées et disjointes de X , alors il existe une application $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ continue telle que
 - (i) pour tout $x \in A, f(x) = 0$,
 - (ii) pour tout $x \in B, f(x) = 1$,
 - (iii) pour tout $x \in X, 0 \leq f(x) \leq 1$.

Indication : considérer f définie par $f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$.

Exercice 17. (★) Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie A de X , on note $\alpha(A) = \overset{\circ}{\bar{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

1. Soit U un ouvert de X . Montrer l'inclusion $U \subset \alpha(U)$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que pour tout $A \subset X$, $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.
3. On considère $(\mathbf{R}, |\cdot|)$.
 - (a) Pour les différents ensembles A suivants, déterminer $\overset{\circ}{A}$, \bar{A} , $\alpha(A)$, $\beta(A)$: $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$, $]1, 2[\cup]2, 3[$, $\{-1\}$.
 - (b) Construire une partie A de \mathbf{R} telle que les ensembles suivants soient deux à deux distincts : A , $\overset{\circ}{A}$, \bar{A} , $\overset{\circ}{\bar{A}}$, $\overline{\overset{\circ}{A}}$.

Exercice 18. (★) *Étude de la séparabilité des espaces $\ell^p(\mathbf{R})$*

1. Soit $p \in [1, +\infty[$.
 - (a) Montrer que l'ensemble Z des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est dense dans $\ell^p(\mathbf{R})$.
 - (b) En déduire que $\ell^p(\mathbf{R})$ est séparable.
2. Montrer que $\ell^\infty(\mathbf{R})$ n'est pas séparable. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser un argument diagonal.*

Exercice 19. (★)

Soit X un espace métrique, $A \subset X$ un fermé et $f: A \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. On considère une fonction définie par

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \inf\{f(a) + \frac{d(x,a)-d(x,A)}{d(x,A)} : a \in A\} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que F est bien définie sur X et continue.
2. Montrer qu'il existe une fonction continue $G: X \rightarrow [0, 1]$ qui étend f (on vient de démontrer le *lemme d'extension de Tietze* pour les espaces métriques).