Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2019–2020**

L2 - Informatique — UE : Statistiques pour l'Informatique

Feuille TP 4

Loi des grands nombres et Théorème centrale limite

Exercice TP4.1.

1. En utilisant `rbinom`, simuler un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_N)$ de variables indépendantes et de même loi de Bernoulli $B(1, 0.5)$ pour N grand (par exemple N=2000).
2. Illustrer la loi des grands nombres en traçant $\overline{X}_n = \frac{X_1+X_2+\cdots X_n}{n}$. en fonction de n (compris entre 1 et N). On tracera aussi la limite attendue sur le même graphique.

   On pourra pour cela utiliser la fonction `cumsum`.
3. Procéder de même avec un échantillon de loi normale $N(1, 2)$ de moyenne 1 et d'écart type 2.

Exercice TP4.2.

1. Soit S_N de loi binomiale $B(N, p)$ avec $p = 0.5$ et $N = 10000$. En utilisant une boucle, simuler un échantillon de $M = 5000$ variables de même loi que

$$V_N = \sqrt{N}\frac{\overline{X}_N - p}{\sqrt{p(1-p)}}$$

   avec $\overline{X}_N = \frac{S_N}{N}$.
2. Illustrer le Théorème central limite en traçant l'histogramme des M réalisations et en le comparant à la densité de la loi $N(0, 1)$.

Intervalles de confiance

Exercice TP4.3. Jean souhaite connaître la taille moyenne des garçons de sa promo. Cependant il y a des milliers d'élèves dans sa promo et il ne peut pas tous les interroger un à un. A la sortie de l'amphi de Stats il a pu récolter la taille de plusieurs de ses camarades: 180, 170, 186, 184, 182, 171, 184, 167, 180, 177 (en cm).

1. Quelles hypothèses doit-on admettre pour calculer un intervalle de confiance de la taille moyenne?
2. On sait que la variance σ^2 de la taille est égale à 5. Calculer un intervalle de confiance de niveau 95% de la taille moyenne.
3. Répéter la question précédente en calculant cette fois-ci un intervalle de confiance de niveau 99%.
4. Jean a réussi à récolter 10 nouvelles tailles: 173, 167, 170, 174, 178, 178, 175, 166, 172, 170. Comment évolue l'intervalle de confiance de niveau 95%?

Exercice TP4.4. Suite aux travaux menés par Jean, Amina souhaite faire la même chose pour les filles de sa promo. Cependant elle ne connaît pas la variance de la taille des filles. Voici les tailles collectées par Amina: 166, 170, 161, 167, 168, 169, 169, 166, 163, 161, 162, 171, 169, 156, 168.

1. Donner un intervalle de confiance de niveau 95% de la taille moyenne des filles.
2. On suppose maintenant que l'on connaît la variance de la taille des filles, $\sigma^2 = 3$. Ré-ajuster l'intervalle de confiance et comparer avec l'intervalle de confiance de la question précédente.

Exercice TP4.5. Dans un centre avicole, des études antérieures ont montré que la masse d'un œuf choisi au hasard peut être considérée comme la réalisation d'une variable aléatoire normale X, de moyenne m et de variance σ^2. On prend un échantillon de $n = 36$ œufs que l'on pèse. Les mesures sont données dans le tableau suivant :

50.34	52.62	53.79	54.99	55.82	57.67
51.41	53.13	53.89	55.04	55.91	57.99
51.51	53.28	54.63	55.12	55.95	58.10
52.07	53.30	54.76	55.24	57.05	59.30
52.22	53.32	54.78	55.28	57.18	60.58
52.38	53.39	54.93	55.56	57.31	63.15

1. Calculer la moyenne empirique et l'écart-type empirique de cette série statistique.
2. Donner un intervalle de confiance au niveau 95%, puis 98%, de la masse moyenne m d'un œuf. (On pourra utiliser la fonction t.test)

Exercice TP4.6. Simuler (avec `rnorm`) un échantillon de loi $\mathcal{N}(3, 2)$ de taille 100. Tester si on peut affirmer avec un niveau de confiance de 95%, au vu de l'échantillon, l'hypothèse que la moyenne est différente de $\mu_0 = 3.3$. Recommencer avec un échantillon de taille 1000.

Exercice TP4.7. Vérifier empiriquement lesquels des énoncés suivants sont vrais. On suppose toujours X et Y indépendantes.

1. Si X suit une loi de Poisson $P(\lambda)$ et si Y suit une loi de Poisson $P(\mu)$, alors $X + Y$ suit une loi de Poisson $P(\lambda + \mu)$.
2. Si X suit une loi exponentielle $E(\lambda)$ et si Y suit une loi exponentielle $E(\mu)$, alors $X + Y$ suit une loi exponentielle $E(\nu)$, avec $\lambda^{-1} + \mu^{-1} = \nu^{-1}$.
3. Si X et Y suivent une loi normale $N(0, 1)$, alors $X^2 + Y^2$ suit une loi exponentielle $E(1/2)$.