
Feuille TD 3

Exercice 3.1 On regarde le jet de deux dés munis de la probabilité uniforme sur l'ensemble des 6^2 résultats possibles. Préciser l'espace de probabilité et déterminer la probabilité de l'événement de trouver chacune des valeurs 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12 comme somme de deux résultats.

Exercice 3.2 On jette indépendamment n fois une pièce de monnaie non biaisée.

1. Quelle est la probabilité qu'on trouve exactement k fois pile ?
2. Quelle est la probabilité que la liste de résultats reste la même si on la lit dans le sens inverse ?

Exercice 3.3 On a trois dés D_1, D_2, D_3 munis de probabilités uniformes, mais étiquetés de manière étrange. Les étiquettes de D_1 sont 2, 2, 4, 4, 9, 9, de D_2 sont 1, 1, 6, 6, 8, 8 et de D_3 sont 3, 3, 5, 5, 7, 7. On définit p_{ij} comme la probabilité que D_i donne un résultat plus grand que D_j .

Calculer p_{12} , p_{23} et p_{31} . Qu'est-ce qu'on peut dire du choix optimal de dé(s) dans un jeu entre deux joueurs qui choisissent, l'un après l'autre, un dé chacun, si le jeu consiste à obtenir une valeur plus élevée que celle de l'adversaire ?

Exercice 3.4 On se pose la question de savoir si on peut piper deux dés (avec étiquettes 1, 2, 3, 4, 5, 6 chacun) de manière à ce que les sommes S possibles de 2 à 12 deviennent équiprobables.

Supposons donc que les probabilités du premier dé sont p_1, p_2, \dots, p_6 et du deuxième dé q_1, q_2, \dots, q_6 et que chaque valeur de la somme est équiprobable.

1. Trouver deux expressions pour $\mathbb{P}(S = 2)$, $\mathbb{P}(S = 12)$ et exprimer p_1 et p_6 en utilisant q_1 et q_6 .
2. Montrer que $\frac{1}{11} = \mathbb{P}(S = 7) \geq p_1 q_6 + p_6 q_1$ et éliminer p_1 et p_6 de cette expression.
3. Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ pour $a, b > 0$.
4. Conclure.

Exercice 3.5 Pour dépister une maladie, on applique un test sanguin. Si le patient est atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais le test est également positif pour 2% des personnes en bonne santé. La proportion de personnes malades dans la population soumise au test est de 10^{-3} . Calculer la probabilité pour qu'un patient soit en bonne santé sachant que le résultat de son test est positif.

Exercice 3.6 Alors qu'ils ne représentent que 13% de la population, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 30% des tués sur la route. À l'aide de ces données vérifier qu'un jeune a 2.87 fois plus de risque de mourir sur la route qu'un autre usager.

Exercice 3.7 On lance indépendamment deux pièces de monnaies, chacune ayant même probabilité d'obtenir Pile ou Face.

On note A l'événement "les deux résultats sont identiques", B l'événement "la première pièce donne Pile" et C l'événement "la seconde pièce donne Face".

Montrer que les trois événements sont deux à deux indépendants, mais pas indépendants.

Exercice 3.8 Deux événements A et B disjoints ($A \cap B = \emptyset$) et de probabilités non nulles, peuvent-ils être indépendants ?

Exercice 3.9 Vous jouez à deux à la roulette russe avec un revolver doté d'un barillet tournant qui comporte six emplacements pour les balles (chaque joueur ne tirera qu'une balle). Chaque fois que l'on presse la détente, le barillet tourne d'un cran. Deux balles sont insérées côte à côte dans le barillet qui est ensuite positionné au hasard. Votre adversaire place le premier le canon du revolver contre sa tempe, presse la détente ... et reste en vie. Grand seigneur, il vous propose de faire tourner à nouveau le barillet au hasard avant de tirer à votre tour. Que décidez-vous ? Est-ce que vous faites tourner le barillet avant de tirer ?

Exercice 3.10 Trois chasseurs tirent en même temps sur un éléphant lors d'un safari. La bête meurt atteinte par deux balles. On estime la valeur d'un chasseur par sa probabilité d'atteindre la cible en un coup. Ces probabilités sont respectivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$. Trouver pour chacun des chasseurs la probabilité d'avoir raté l'éléphant.

Exercice 3.11 Le candidat dans un jeu télévisé est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Il doit choisir une porte. À ce moment, le présentateur doit toujours ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par candidat, ni celle cachant la voiture. Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.

Faut-il prendre la porte initiale, la troisième porte, ou est-ce que ce choix est sans importance ?

Exercice 3.12

1. On lance deux dés équilibrés (à 6 faces). Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats soit égale à 7 ? Quelle est l'espérance de la somme ?
2. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins un 6 ?
3. Lequel des deux événements suivants est plus probable : (a) obtenir au moins une fois un six en 4 lancers d'un dé ou (b) obtenir au moins une fois un double six en 24 lancers de deux dés ?

Exercice 3.13

1. On possède deux pièces truquées différentes (indépendantes), la première obtient face avec probabilité p , la seconde avec probabilité q .
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ?
2. Deux archers tirent sur n cibles, une flèche par cible et par archer. Le premier touche avec probabilité p , le second avec probabilité q .
Quelle est la probabilité que k cibles au moins soient épargnées ?

Exercice 3.14 On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/4$. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.