

Chapitre 2 : Suites et séries numériques et de fonctions

Mathématiques 3, 2019

II. Suites et séries de fonctions

Convergence uniforme

Soit $f : D \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ une application bornée.

Soit $f : D \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ une application bornée. On note

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

qu'on appelle **la norme de la convergence uniforme** de f .

Soit $f : D \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ une application bornée. On note

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

qu'on appelle **la norme de la convergence uniforme** de f .

Remarquons que si (f_n) est une suite de fonctions, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction f si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Convergence et continuité

Théorème 1

Théorème 1

Si une suite de fonctions (f_n) **converge uniformément** sur D vers une fonction f et si chaque f_n est **continue** sur D , alors f est **continue** sur D .

Théorème 1

Si une suite de fonctions (f_n) **converge uniformément** sur D vers une fonction f et si chaque f_n est **continue** sur D , alors f est **continue** sur D .

Plus précisément, si (f_n) **converge uniformément** sur D vers f et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors f est continue en x_0 et on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

Convergence et continuité

Remarque

Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple).

Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple). Reprenons la suite

$$f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}. \end{cases}$$

Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple). Reprenons la suite

$$f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}. \end{cases}$$

dont la limite simple est

Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple). Reprenons la suite

$$f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}. \end{cases}$$

dont la limite simple est $f : D = [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Remarque

Attention, la convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la continuité de la limite (simple). Reprenons la suite

$$f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}. \end{cases}$$

dont la limite simple est $f : D = [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Chaque f_n est continue sur D (en particulier en 0), alors que f n'est pas continue en 0.

Convergence et intégrales

Théorème 2

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions

Riemann-intégrables sur $[a, b]$ et **convergeant uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f .

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions

Riemann-intégrables sur $[a, b]$ et **convergeant uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f . Alors

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$ et **convergeant uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f . Alors

- f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$ et **convergeant uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f . Alors

- f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

la suite (F_n) converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$ et **convergeant uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction f . Alors

- f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

la suite (F_n) converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

En particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt.$$

Convergence et intégrales

Exemple 1 (suite)

Exemple 1 (suite)

Reprenons la suite (où $a > 0$)

Exemple 1 (suite)

Reprenons la suite (où $a > 0$)

$$f_n : \begin{cases} [a, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \end{cases} f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}.$$

Exemple 1 (suite)

Reprenons la suite (où $a > 0$)

$$f_n : \begin{cases} [a, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}. \end{cases}$$

dont la limite uniforme est $f : D = [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1$.

Exemple 1 (suite)

Reprenons la suite (où $a > 0$)

$$f_n : \begin{cases} [a, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}. \end{cases}$$

dont la limite uniforme est $f : D = [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.

Sur $[a, 1]$ on a

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt = (x - a) - \frac{\ln(1 + nx)}{n} + \frac{\ln(1 + na)}{n}, \quad F(x) = x - a,$$

et on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = F$ uniformément.

Convergence et dérivées

Théorème 3

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

- que la suite (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ,

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

- que la suite (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge.

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

- que la suite (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge.

Alors la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

- que la suite (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge.

Alors la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

En particulier, si chaque f_n est de classe C^1 , il en est de même de f .

II. 2. Séries de fonctions

De la même manière qu'on avait défini les séries numériques à partir des suites numériques, on définit les **séries de fonctions** à partir des suites de fonctions.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions. Donc on s'intéresse à la somme

$$f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

Si x est fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est une suite numérique et donc on peut étudier la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$.

Définition 1

Définition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions (réelle ou complexe).

Définition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions (réelle ou complexe). On appelle **série de fonctions** de terme général f_n et on note $\sum f_n$, la **suite de fonctions** (S_n) définie par

Définition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions (réelle ou complexe). On appelle **série de fonctions** de terme général f_n et on note $\sum f_n$, la **suite de fonctions** (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Définition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions (réelle ou complexe). On appelle **série de fonctions** de terme général f_n et on note $\sum f_n$, la **suite de fonctions** (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On appelle S_n la **la somme partielle d'ordre n** de la série $\sum f_n$.

Définition 1

Soit (f_n) une suite de fonctions (réelle ou complexe). On appelle **série de fonctions** de terme général f_n et on note $\sum f_n$, la **suite de fonctions** (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On appelle S_n la **la somme partielle d'ordre n** de la série $\sum f_n$.

Remarque

On a

$$S_n(x) = f_0(x) + \cdots + f_n(x).$$

Convergence simple

Définition 2 (Convergence simple)

Définition 2 (Convergence simple)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D .

Définition 2 (Convergence simple)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D . On dit que la série $\sum f_n$ **converge simplement sur D**

Définition 2 (Convergence simple)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D . On dit que la série $\sum f_n$ **converge simplement sur D** si la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur D .

D'une manière équivalente : la série $\sum f_n$ converge simplement sur D si pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.

Définition 2 (Convergence simple)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D . On dit que la série $\sum f_n$ **converge simplement sur D** si la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur D .

D'une manière équivalente : la série $\sum f_n$ converge simplement sur D si pour tout $x \in D$, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente.

Notation. Si $\sum f_n$ converge simplement sur D vers la fonction s , on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = s(x).$$

Exemple 1.

Exemple 1. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

Exemple 1. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Exemple 1. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum f_n$.

Exemple 1. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum f_n$. Fixons $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 1. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum f_n$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Exemple 1. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum f_n$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente (c'est une série géométrique convergente), on déduit que la série numérique $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est absolument convergente.

Exemple 1. Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Étudions la convergence simple de la série $\sum f_n$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente (c'est une série géométrique convergente), on déduit que la série numérique $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est absolument convergente.

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

Convergence simple

Exemple 2 (séries géométriques).

Convergence simple

Exemple 2 (séries géométriques). Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$.

Convergence simple

Exemple 2 (séries géométriques). Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. La suite $(f_n(z))$ est une suite géométrique de raison z et on a

Convergence simple

Exemple 2 (séries géométriques). Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. La suite $(f_n(z))$ est une suite géométrique de raison z et on a

$$\text{si } z \neq 1, S_n(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Exemple 2 (séries géométriques). Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. La suite $(f_n(z))$ est une suite géométrique de raison z et on a

$$\text{si } z \neq 1, S_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

$$\text{si } z = 1, S_n(z) = n + 1.$$

Convergence simple

Exemple 2 (séries géométriques). Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. La suite $(f_n(z))$ est une suite géométrique de raison z et on a

$$\text{si } z \neq 1, S_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

$$\text{si } z = 1, S_n(z) = n + 1.$$

La série $\sum f_n(z)$ converge si et seulement si $0 \leq |z| < 1$.

Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Dans ce cas, on peut calculer sa limite simple :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}.$$

Convergence uniforme

Définition 3 (Convergence uniforme)

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D .

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D . On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur D

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur D . On dit que la série $\sum f_n$ **converge uniformément sur D** si la suite de fonctions des sommes partielles (S_n) converge uniformément sur D .

Proposition 1

Toute série de fonctions qui converge uniformément sur D converge simplement sur D .

Convergence uniforme

Exemple 2 : séries géométriques

Exemple 2 : séries géométriques

Reprenons $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$.

Exemple 2 : séries géométriques

Reprenons $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. Sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, on a

Exemple 2 : séries géométriques

Reprenons $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. Sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, on a

$$S_n(z) - S(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{-z^{n+1}}{1 - z},$$

Exemple 2 : séries géométriques

Reprenons $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. Sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, on a

$$S_n(z) - S(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{-z^{n+1}}{1 - z},$$

et donc

Exemple 2 : séries géométriques

Reprenons $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général $f_n(z) = z^n$. Sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, on a

$$S_n(z) - S(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{-z^{n+1}}{1 - z},$$

et donc $|S_n(z) - S(z)| = \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} \leq \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||}$.

Comme $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{|z|^{n+1}}{|1 - z|} = +\infty$, la série $\sum f_n(z)$ ne converge pas uniformément sur le disque $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Convergence uniforme

Exemple 2 : séries géométriques

Exemple 2 : séries géométriques

En revanche, elle converge uniformément sur tout disque de la forme $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ où $0 \leq r < 1$.

Exemple 2 : séries géométriques

En revanche, elle converge uniformément sur tout disque de la forme $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ où $0 \leq r < 1$. En effet,

$$|S_n(z) - S(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} \leq \frac{r^{n+1}}{|1 - r|}$$

Exemple 2 : séries géométriques

En revanche, elle converge uniformément sur tout disque de la forme $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}$ où $0 \leq r < 1$. En effet,

$$|S_n(z) - S(z)| \leq \frac{|z|^{n+1}}{|1 - |z||} \leq \frac{r^{n+1}}{|1 - r|}$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^{n+1}}{|1 - r|} = 0$, on déduit la convergence uniforme.

Définition 4

Définition 4

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers S .

Définition 4

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers S . On appelle **suite des restes partiels**, la suite $(R_n)_n$ de fonctions définie par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

R_n est appelé le **reste d'ordre n** .

Définition 4

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers S . On appelle **suite des restes partiels**, la suite $(R_n)_n$ de fonctions définie par

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

R_n est appelé le **reste d'ordre n** .

Remarque

Remarquons que (R_n) est bien définie et que pour tout $x \in D$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

et donc en particulier $(R_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle.

Proposition 2

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur D . Alors elle converge **uniformément** sur D si et seulement si la suite des restes partiels (R_n) converge **uniformément** sur D vers la fonction nulle.

Convergence uniforme et reste partiel

Convergence uniforme et reste partiel

Le critère précédent est particulièrement utile lorsqu'on peut majorer le reste d'ordre n . C'est le cas, par exemple, des séries alternées.

Le critère précédent est particulièrement utile lorsqu'on peut majorer le reste d'ordre n . C'est le cas, par exemple, des séries alternées.

Exemple 3

Soit $\sum f_n$ la série de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Le critère précédent est particulièrement utile lorsqu'on peut majorer le reste d'ordre n . C'est le cas, par exemple, des séries alternées.

Exemple 3

Soit $\sum f_n$ la série de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé, la série numérique $\sum u_n(x)$ de terme général $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée qui satisfait les conditions de la règle des séries alternées : $|u_n(x)|$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$.

Le critère précédent est particulièrement utile lorsqu'on peut majorer le reste d'ordre n . C'est le cas, par exemple, des séries alternées.

Exemple 3

Soit $\sum f_n$ la série de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé, la série numérique $\sum u_n(x)$ de terme général $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée qui satisfait les conditions de la règle des séries alternées : $|u_n(x)|$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$.
Donc la série $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}^{+*} .

Convergence uniforme et reste partiel

Exemple 3

Exemple 3

Comme $\sum u_n(x)$ satisfait les conditions de la règle des séries alternées, nous avons la majoration

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$|R_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n+1}.$$

On déduit la convergence uniforme de (R_n) vers 0.

Exemple 3

Comme $\sum u_n(x)$ satisfait les conditions de la règle des séries alternées, nous avons la majoration

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$|R_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n+1}.$$

On déduit la convergence uniforme de (R_n) vers 0.

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}^{+*} .

Convergence normale

Définition 5

Définition 5

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

Définition 5

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement sur D** si la série numérique à termes positifs $\sum \|f_n\|$ est convergente.

Définition 5

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement sur D** si la série numérique à termes positifs $\sum \|f_n\|$ est convergente.

Définition 6

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. On dit que $\sum f_n$ **converge absolument sur D** si la série de fonctions $\sum |f_n|$ est simplement convergente sur D .

Convergence normale

Remarques

Remarques

- Pour montrer qu'il y a convergence normale, on cherche à majorer $\|f_n\|$ par un réel u_n tel que $\sum u_n$ soit convergente.

Remarques

- Pour montrer qu'il y a convergence normale, on cherche à majorer $\|f_n\|$ par un réel u_n tel que $\sum u_n$ soit convergente.
- Pour montrer qu'il n'y a pas convergence normale, on cherche à minorer $\|f_n\|$ par un réel u_n tel que $\sum u_n$ soit divergente.

Exemple 1 (suite)

Exemple 1 (suite)

Reprenons $(f_n)_n$ la suite de fonctions

Exemple 1 (suite)

Reprenons $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Exemple 1 (suite)

Reprenons $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

Exemple 1 (suite)

Reprenons $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

et donc

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{3^n}.$$

Exemple 1 (suite)

Reprenons $(f_n)_n$ la suite de fonctions

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{3^n}. \end{cases}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

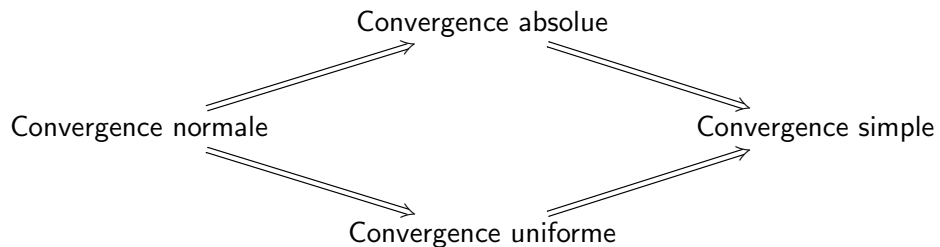
$$\left| \frac{\sin(nx)}{3^n} \right| \leq \frac{|\sin(nx)|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

et donc

$$\|f_n\| \leq \frac{1}{3^n}.$$

Comme la série numérique $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente, on déduit que la série de fonctions $\sum \frac{\sin(nx)}{3^n}$ est normalement convergente.

Liens entre les différentes formes de convergence



Remarque

Remarque

La convergence uniforme n'entraîne pas la convergence absolue.

Remarque

La convergence uniforme n'entraîne pas la convergence absolue.
Reprenons la série $\sum f_n$ de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Remarque

La convergence uniforme n'entraîne pas la convergence absolue.

Reprenons la série $\sum f_n$ de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Nous avons vu qu'elle est uniformément convergente. Mais elle n'est pas absolument convergente.

Remarque

La convergence uniforme n'entraîne pas la convergence absolue.
Reprenons la série $\sum f_n$ de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Nous avons vu qu'elle est uniformément convergente. Mais elle n'est pas absolument convergente.

Remarque

La convergence uniforme n'entraîne pas la convergence absolue. Reprenons la série $\sum f_n$ de terme général

$$f_n : \begin{cases} D =]0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}. \end{cases}$$

Nous avons vu qu'elle est uniformément convergente. Mais elle n'est pas absolument convergente. En effet,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x+n} \sim \frac{1}{n}$$

et la série $\sum \frac{1}{n}$ n'est pas convergente et donc $\sum |f_n|$ n'est pas convergente.

Proposition 3

Proposition 3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

Proposition 3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

- Si $\sum f_n$ converge simplement, alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Proposition 3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

- Si $\sum f_n$ converge simplement, alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

Proposition 3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions.

- Si $\sum f_n$ converge simplement, alors (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
- Si $\sum f_n$ converge normalement, alors $(\|f_n\|)$ converge vers 0.

Comme les séries est un cas particulier des suites de fonctions ...

Comme les séries est un cas particulier des suites de fonctions ...

Théorème 1

Comme les séries est un cas particulier des suites de fonctions ...

Théorème 1

Si une série de fonctions $\sum(f_n)$ **converge uniformément** sur D vers une fonction S et si chaque f_n est continue sur D , alors S est continue sur D .

Comme les séries est un cas particulier des suites de fonctions ...

Théorème 1

Si une série de fonctions $\sum(f_n)$ **converge uniformément** sur D vers une fonction S et si chaque f_n est continue sur D , alors S est continue sur D .

Plus précisément, si $\sum f_n$ **converge uniformément** sur D vers S et si chaque f_n est continue en $x_0 \in D$, alors S est continue en x_0 .

On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

Convergence et intégrales

Théorème 2

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$.

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$. Supposons que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction S .

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$. Supposons que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction S . Alors

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$. Supposons que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction S . Alors

- S est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$. Supposons que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction S . Alors

- S est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad F(x) = \int_a^x S(t) dt,$$

la série $\sum F_n$ converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

Théorème 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions **Riemann-intégrables** sur $[a, b]$. Supposons que $\sum f_n$ **converge uniformément** sur $[a, b]$ vers une fonction S . Alors

- S est Riemann-intégrable sur $[a, b]$,
- en posant, pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad F(x) = \int_a^x S(t) dt,$$

la série $\sum F_n$ converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

On a, en particulier

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right).$$

Convergence et dérivées

Théorème 3

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

- que la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ,

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

- que la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge.

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

- que la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge.

Alors la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

- que la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge.

Alors la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

Ce qu'on peut formuler

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t).$$

Théorème 3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose :

- que la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g ,
- qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge.

Alors la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f dérivable telle que $f' = g$.

Ce qu'on peut formuler

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t).$$

Si chaque f_n est de classe C^1 , il en est de même de f .

Exercice récapitulatif

Exercice récapitulatif

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \end{cases} f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^3 x^2}.$$

Exercice récapitulatif

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}. \end{cases}$$

(1) Soit $a > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $D_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Y-a-t-il convergence normale sur \mathbb{R} ?

Exercice récapitulatif

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}. \end{cases}$$

- (1) Soit $a > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $D_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Y-a-t-il convergence normale sur \mathbb{R} ?
- (2) Soit S la limite de la série. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.
- (3) Montrer que S est dérivable sur \mathbb{R}^* et écrire S' comme la somme d'une série.

Exercice récapitulatif

Soit $\sum f_n$ la série de fonctions de terme général

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}. \end{cases}$$

- (1) Soit $a > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $D_a =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Y-a-t-il convergence normale sur \mathbb{R} ?
- (2) Soit S la limite de la série. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.
- (3) Montrer que S est dérivable sur \mathbb{R}^* et écrire S' comme la somme d'une série.
- (4) Montrer que S est Riemann-Intégrable sur $[1, 2]$ et écrire $\int_1^2 S(x) dx$ comme la somme d'une série.

Corrigé à lire chez soi

Corrigé à lire chez soi

(1) On a

$$f'_n(x) = \frac{n(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2}, \quad f'_n(x) = 0 \text{ ssi } x = \pm \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

$$f'_n(x) \leq 0 \text{ ssi } |x| \geq \frac{1}{\sqrt{n^3}} \text{ ssi } x \in] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty [$$

Corrigé à lire chez soi

(1) On a

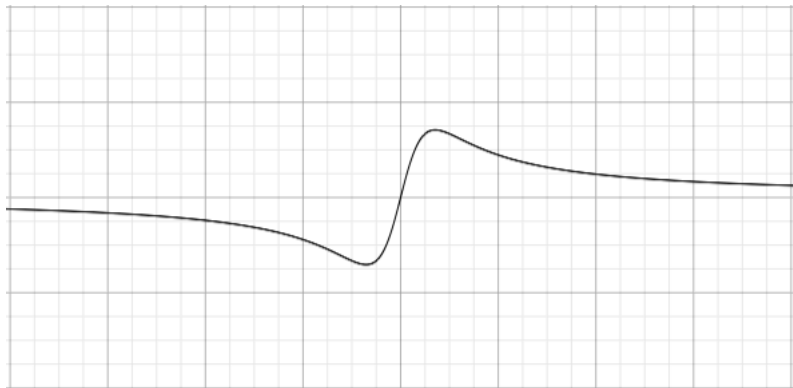
$$f'_n(x) = \frac{n(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2}, \quad f'_n(x) = 0 \text{ ssi } x = \pm \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

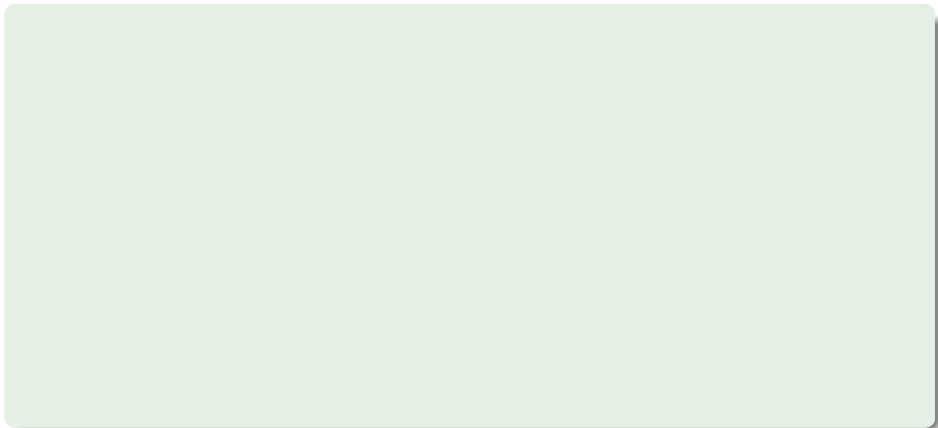
$$f'_n(x) \leq 0 \text{ ssi } |x| \geq \frac{1}{\sqrt{n^3}} \text{ ssi } x \in] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[$$

Donc

$$f_n \text{ est décroissante sur }] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{n^3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{n^3}}, +\infty[,$$

$$\text{et croissante sur } [-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}].$$





Pour n assez grand,

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right] \subseteq [-a, a], \quad \|f_n\|_D = \sup_{D_a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{na}{1 + n^3 a^2} \sim \frac{1}{an^2}.$$

Pour n assez grand,

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right] \subseteq [-a, a], \quad \|f_n\|_D = \sup_{D_a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{na}{1+n^3a^2} \sim \frac{1}{an^2}.$$

Donc la série converge normalement sur D_a .

Pour n assez grand,

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right] \subseteq [-a, a], \quad \|f_n\|_D = \sup_{D_a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{na}{1+n^3a^2} \sim \frac{1}{an^2}.$$

Donc la série converge normalement sur D_a .

Sur \mathbb{R} , on a

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Pour n assez grand,

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{n^3}}, \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right] \subseteq [-a, a], \quad \|f_n\|_D = \sup_{D_a} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{na}{1+n^3a^2} \sim \frac{1}{an^2}.$$

Donc la série converge normalement sur D_a .

Sur \mathbb{R} , on a

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente. On déduit que la série $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur \mathbb{R} .

(2) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$ et $0 < a < x_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en x_0 . La série $\sum f_n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. En conclu que sa limite S est continue en x_0 .

(2) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$ et $0 < a < x_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en x_0 . La série $\sum f_n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. En conclu que sa limite S est continue en x_0 .

(3) Pour pouvoir appliquer le théorème de la dérivation des séries, on étudier la convergence uniforme de la série $\sum f'_n$.

(2) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$ et $0 < a < x_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en x_0 . La série $\sum f_n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. En conclu que sa limite S est continue en x_0 .

(3) Pour pouvoir appliquer le théorème de la dérivation des séries, on étudier la convergence uniforme de la série $\sum f'_n$. On a

$$f'_n(x) = \frac{n(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2}.$$

(2) Soit $x_0 \in]0, +\infty[$ et $0 < a < x_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en x_0 . La série $\sum f_n$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$. En conclu que sa limite S est continue en x_0 .

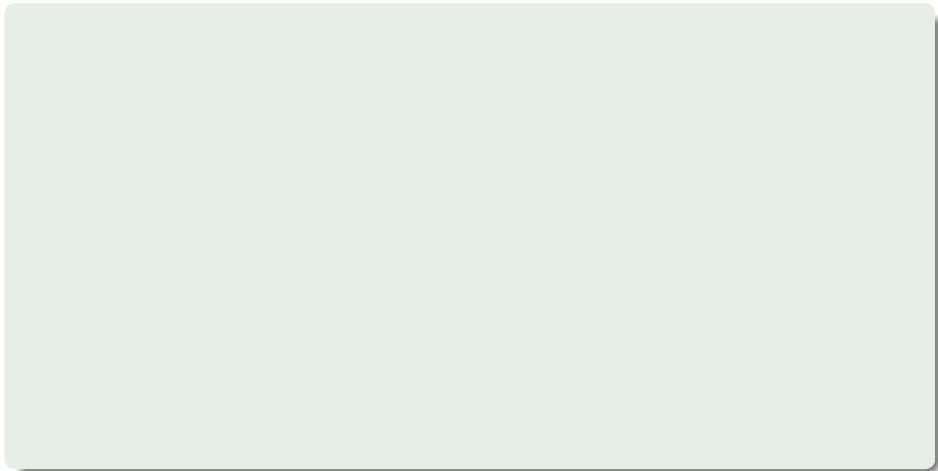
(3) Pour pouvoir appliquer le théorème de la dérivation des séries, on étudier la convergence uniforme de la série $\sum f'_n$. On a

$$f'_n(x) = \frac{n(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2}.$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < 0$ ou $0 < a < b$. On a, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\|f'_n(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3b)}{(1 + n^3a^2)^2}, \quad \text{si } 0 < a < b,$$

$$\|f'_n(x)\| \leq \frac{n(1 + n^3|a|)}{(1 + n^3|b|^2)^2}, \quad \text{si } a < b < 0.$$



Or

$$\frac{n(1 + n^3\alpha)}{(1 + n^3\beta^2)^2} \sim \frac{\alpha}{\beta^4 n^2}$$

Or

$$\frac{n(1 + n^3\alpha)}{(1 + n^3\beta^2)^2} \sim \frac{\alpha}{\beta^4 n^2}$$

et donc la série $\sum f'_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$.

Or

$$\frac{n(1 + n^3\alpha)}{(1 + n^3\beta^2)^2} \sim \frac{\alpha}{\beta^4 n^2}$$

et donc la série $\sum f'_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$.
Comme $\sum f_n$ est normalement convergente, elle est simplement convergente et donc il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ est convergente.

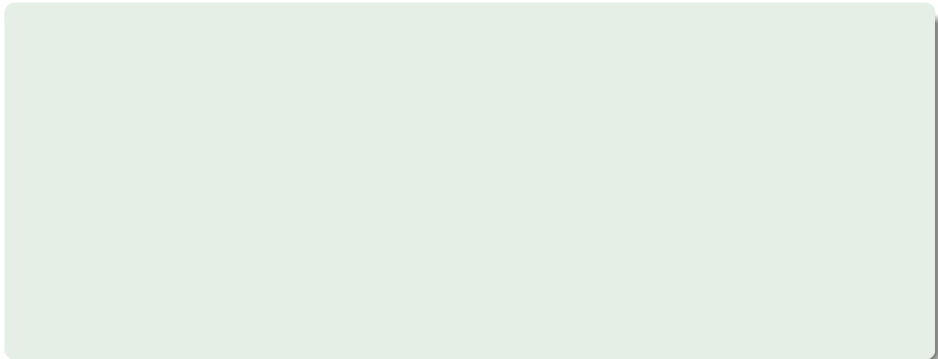
Or

$$\frac{n(1 + n^3\alpha)}{(1 + n^3\beta^2)^2} \sim \frac{\alpha}{\beta^4 n^2}$$

et donc la série $\sum f'_n$ est uniformément convergente sur $[a, b]$.
Comme $\sum f_n$ est normalement convergente, elle est simplement convergente et donc il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ est convergente.

Par conséquent, S est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(1 - n^3x^2)}{(1 + n^3x^2)^2}.$$



(4) La série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[1, 2]$ et donc S est Riemann-Intégrable sur $[1, 2]$.

(4) La série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[1, 2]$ et donc S est Riemann-Intégrable sur $[1, 2]$. On a

$$\int_1^2 f_n(x) dx = \frac{1}{2n^2} \ln \left(\frac{1 + 4n^3}{1 + n^3} \right),$$

(4) La série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[1, 2]$ et donc S est Riemann-Intégrable sur $[1, 2]$. On a

$$\int_1^2 f_n(x) dx = \frac{1}{2n^2} \ln \left(\frac{1 + 4n^3}{1 + n^3} \right),$$

et donc

$$\int_1^2 S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \ln \left(\frac{1 + 4n^3}{1 + n^3} \right).$$

III. Séries entières

Définition 1

Définition 1

Une **série entière** est une série de fonctions de la forme

Définition 1

Une **série entière** est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

où (a_n) est une suite réelle ou complexe.

Définition 1

Une **série entière** est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

où (a_n) est une suite réelle ou complexe.

La somme est la fonction qui à tout complexe z , pour lequel la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge, associe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Exemple 1

$$\sum_{n \geq 0} z^n, \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n, \sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n, \sum_{n \geq 0} i^n z^n$$

Remarque

- Une série entière est un cas particulier des séries de fonctions où dans ce cas la terme général est de la forme $f_n(z) = a_n z^n$.
- Donc tout ce qu'a été fait précédemment sur les séries de fonctions s'applique aux séries entières. En particulier on peut étudier la convergence simple, uniforme, ...

Les séries entières sont extrêmement importantes en analyse et dans l'étude des fonctions et des solutions des équations différentielles.

Par exemple, beaucoup de fonctions peuvent s'écrire comme somme de séries entières.

Les séries entières possèdent beaucoup de propriétés remarquables qu'on peut étudier à l'aide d'un réel $R \geq 0$, appelé **rayon de convergence**.

Théorème 1

Théorème 1

Soit (a_n) une suite de réels ou de complexes.

Théorème 1

Soit (a_n) une suite de réels ou de complexes. Posons

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n|r^n)_n \text{ est majorée}\}.$$

Alors R est l'unique réel $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ possédant les deux propriétés suivantes :

Théorème 1

Soit (a_n) une suite de réels ou de complexes. Posons

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n|r^n)_n \text{ est majorée}\}.$$

Alors R est l'unique réel $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ possédant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Théorème 1

Soit (a_n) une suite de réels ou de complexes. Posons

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n|r^n)_n \text{ est majorée}\}.$$

Alors R est l'unique réel $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ possédant les deux propriétés suivantes :

- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.
- pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Définition 2

Définition 2

- Le réel $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini dans le théorème précédent est appelé le **rayon de convergence** de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Définition 2

- Le réel $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ défini dans le théorème précédent est appelé le **rayon de convergence** de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.
- Le disque ouvert $\mathring{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé le disque de **convergence de la série** $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Remarque

Pour les $z \in \mathbb{C}$, tels que $|z| = R$, on ne peut rien conclure de général sur la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Il faut étudier le cas $|z| = R$ en fonction de la série considérée.

Exemple 2

Considérons la série

$$\sum_{n \geq 0} z^n.$$

Nous avons vu que si $|z| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} z^n$ converge et si $|z| > 1$, elle diverge.

Donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} z^n$ est 1.

Remarquons que pour $|z| = 1$, la série $\sum_{n \geq 0} z^n$ diverge.

Proposition 2 (Règle de D'Alembert)

Proposition 2 (Règle de D'Alembert)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière.

Proposition 2 (Règle de D'Alembert)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Proposition 2 (Règle de D'Alembert)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Alors le rayon de convergence est donné par

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ avec les conventions } \frac{1}{0} = +\infty \text{ et } \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Exemple 3

Exemple 3

Considérons la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

Exemple 3

Considérons la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

et donc le rayon de convergence est $+\infty$.

Exemple 3

Considérons la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

et donc le rayon de convergence est $+\infty$.

L'application

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est appelée **l'exponentielle complexe** et est notée $\exp(z)$ ou e^z .

Proposition 3 (Règle de Cauchy)

Proposition 3 (Règle de Cauchy)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière.

Proposition 3 (Règle de Cauchy)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Proposition 3 (Règle de Cauchy)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Alors

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ avec les conventions } \frac{1}{0} = +\infty \text{ et } \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Exemple 4

Exemple 4

Considérons la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^n}.$$

Exemple 4

Considérons la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^n}.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Exemple 4

Considérons la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^n}.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

et donc le rayon de convergence est $+\infty$.

Proposition 1

Proposition 1

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Proposition 1

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- Pour tout $0 < r < R$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est **normalement convergente** sur le disque (fermé) $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Proposition 1

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- Pour tout $0 < r < R$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est **normalement convergente** sur le disque (fermé) $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.
- Sur $\overset{\circ}{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, en supposant (a_n) réelle, la somme

$$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

est **indéfiniment dérivable** et pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

De même ...

Proposition 2

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R où (a_n) est réelle. Alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $[a, b] \subseteq]-R, R[$,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

Un exemple d'application

Considérons l'équation différentielle

$$(E) \quad y' - y = 0.$$

On connaît l'ensemble des solutions

$$y(x) = C \exp(x), \text{ où } C \in \mathbb{R}.$$

On va retrouver l'ensemble des solutions en utilisant les séries entières.

Un exemple d'application

Soit y une solution de (E) et supposons que y est la somme d'une série entière

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

de rayon de convergence $R > 0$.

Par ce qui précède, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Un exemple d'application

En remplaçant dans (E)

$$y'(x) - y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Une réindexation nous donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+1)a_{n'+1} x^{n'},$$

et comme n' est une "variable muette"

$$\sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+1)a_{n'+1} x^{n'} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n.$$

Un exemple d'application

On obtient donc

$$\begin{aligned}y'(x) - y(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\&= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} - a_n) x^n = 0,\end{aligned}$$

et on déduit

$$(n+1) a_{n+1} - a_n = 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Un exemple d'application

Et donc la formule de récurrence

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Par récurrence sur n ,

$$a_n = \frac{a_0}{n!}$$

et donc

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = a_0 \exp(x).$$

Développement d'une fonction en série entière

Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, où (a_n) est réelle, et S sa somme

$$S : I =] - R, R[\rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Nous avons vu que S est indéfiniment dérivable (de classe C^∞) sur I . De plus

$$\begin{aligned} S(0) &= a_0, \quad S'(0) = a_1, \quad S''(0) = 2a_2, \\ S^{(p)}(0) &= \sum_{n \geq p} n(n-1)(n-2) \cdots (n-p+1) a_n 0^{n-p} = p! a_p \end{aligned}$$

et donc, on peut exprimer a_n en fonction de $S^{(n)}(0)$

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Définition 1

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est **développable en série entière autour de 0**, s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, où (a_n) est réelle, de rayon de convergence R **non nul** et $r \in]0, R[$ vérifiant

$$(1)]-r, r[\subseteq I, \quad (2) \forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

La série entière $\sum a_n x^n$ est appelée le **développement en série entière de f autour de 0**.

Définition 2

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **développable en série entière autour de x_0** si la fonction $x \mapsto f(x - x_0)$ est développable en série entière autour de 0.

Conséquence

Si f est développable en série entière autour de 0, alors f est de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Et donc, sur un voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Conséquence

De même, si f est développable en série entière autour de x_0 , alors f est de classe C^∞ sur un voisinage de x_0 et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Et donc, sur un voisinage de x_0 ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

En particulier le développement en série entière est unique.

Remarque

Toute fonction développable en série entière autour de 0 est de classe C^∞ sur un voisinage de 0. Mais la réciproque est fautive. Il existe des fonctions de classe C^∞ sur un voisinage de 0 qui ne sont pas développables en série entière autour de 0.

Exemple : l'application f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , en particulier autour de 0, et pour laquelle la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

est la fonction nulle.

Nous devons par conséquent distinguer une fonction f de la série qui peut lui être associée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Définition 3

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ , où I est un intervalle qui est un voisinage de x_0 . On appelle **série de Taylor-Maclaurin** de f autour de x_0 , la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Remarque

La série de Taylor-Maclaurin n'est pas forcément convergente. Comme signalé plus haut, il peut arriver que sa somme ne coïncide pas avec f .

Proposition 1 (Condition suffisante)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ , où I est un intervalle qui est un voisinage de x_0 .

Supposons que f est de classe C^∞ sur I et qu'il existe une constante M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Alors f est développable en série entière autour de x_0 et donc sur un voisinage de x_0 , on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Développement d'une fonction en série entière

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ avec $J = [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subseteq I$. On applique la formule de Taylor-Lagrange à f entre x_0 et $x \in J$ à l'ordre m . Donc il existe $c_m \in [x_0, x]$ tel que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(m+1)}(c_m)}{(m+1)!} (x - x_0)^m.$$

D'où

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{n=m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{M}{(m+1)!} \epsilon^m.$$

Comme le dernier terme tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$, on déduit que la série $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ converge uniformément vers f sur J . On vérifie bien que la convergence est normale et donc absolue et par conséquent le rayon de convergence $\geq \epsilon$. □

Exemple 1

Considérons la fonction exponentielle $f(x) = \exp(x)$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. On a

$$f^{(n)}(x) = \exp(x), \quad f^{(n)}(x) \leq \exp(x_0 + \epsilon) \text{ pour tout } x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon].$$

Donc f est développable en série entière autour de x_0 et

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\exp(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

En variant ϵ , on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\exp(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $I =]-1, 1[$ par

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

Alors f est de classe C^∞ sur I et

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}.$$

On a pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

Exemple 2

Par intégration, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{1+x} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^t (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}.\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in I$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

ce qui est le développement en série entière de $\ln(1+x)$ autour de 0.

Exemple d'applications aux équations différentielles

Considérons l'équation différentielle

$$(E) \quad xy' + y = 4 \cos(\sqrt{x}).$$

Supposons que (E) admet une solution y développable en série entière $\sum a_n x^n$, autour de 0, de rayon de convergence $R > 0$. On a alors sur $] - R, R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et en remplaçant dans (E)

$$xy'(x) + y(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exemple d'applications aux équations différentielles

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_n x^n.$$

On a

$$4 \cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{(2n)!} x^n.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)a_n - \frac{4(-1)^n}{(2n)!} \right) x^n = 0$$

et par unicité d'un développement en série entière, on déduit que y est solution de (E) si et seulement si

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{(n+1)(2n)!} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc la solution recherchée est

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{(n+1)(2n)!} x^n.$$

En utilisant la règle de D'Alembert, on montre que le rayon de convergence est $R = +\infty$ et donc la solution obtenue est définie sur \mathbb{R} .