

Corrigé du Contrôle Continu 3
(Maths 3, 2019)

Questions de cours:

① Somme $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^2)^n$ et somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ a somme rayon de convergence 1, on a $|z^2| < 1$ ssi $|z| < 1$ et donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}$ est 1. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^2)^n = \frac{1}{1-z^2}$$

② L'application f est continue par morceaux sur $[a, b]$, s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ de $[a, b]$ telle que f est continue sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$ (par continuité).

Exercice 1:

① Comme $\sin(x) \sim_0 x$, on a $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. De même

comme $\ln(1+x) \sim_0 x$, on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$. Dnc:

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{(n+1)^3 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} (n+1)^3 \cdot \frac{1}{n}}$$

et comme $(n+1)^3 \sim_{+\infty} n^3$, on a finalement

$$u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} \cdot n^3 \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

② Comme $u_n \geq 0$ et comme $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$, les deux séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ ont de la même nature. Comme

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ est une série de Riemann convergente, par le critère des équivalents, $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente.

③ On peut utiliser par exemple le critère de D'Alembert et la question ①. On a, grâce aux équivalents:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{5}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{5}{2}}} = 1$$

et donc le rayon de convergence est 1.

Exercice 2:

① L'application g est la somme de la série entière géométrique de raison x sur I :

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

De même, on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3-x} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{x}{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n. \end{aligned}$$

② Pour tout $t \in]-1, 1[$, on peut intégrer terme à terme:

$$\int_0^t \frac{1}{1-x} dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

et donc $-\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$

et enfin $\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-t^{n+1}}{n+1}$.

De même pour tout $t \in]-1, 1[$, on a:

$$\int_0^t \frac{1}{3-x} dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

D'ici: $-\ln(3-t) + \ln(3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}(n+1)} \cdot t^{n+1}$

Enfin: $\ln(3-t) = \ln(3) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}(n+1)} \cdot t^{n+1}$.

③ On a $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = (1-x)(3-x)$. Somme sur I , $(1-x) > 0$ et $(3-x) > 0$, on a:

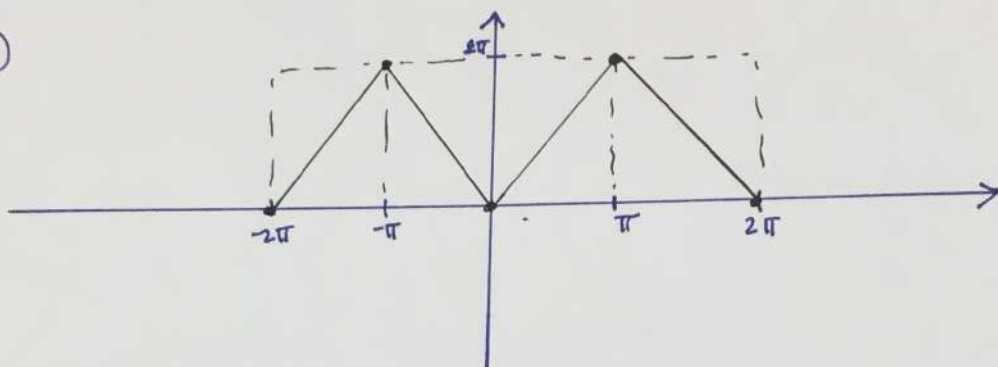
$$\ln(x^2 - 4x + 3) = \ln((1-x)(3-x)) = \ln(1-x) + \ln(3-x).$$

En regroupant les deux développements précédents, on a:

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 4x + 3) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-x^{n+1}}{n+1} + \ln(3) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}(n+1)} x^{n+1} \\ &= \ln(3) - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3^{n+1}(n+1)} \right) x^{n+1} \\ &= \ln(3) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1} + 1}{3^{n+1}(n+1)} x^{n+1}. \end{aligned}$$

Exercice 3:

①



② Comme f est paire, $b_n = 0$, $\forall n \geq 1$, et on a :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Donc:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x dx = \frac{4}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \pi^2 = 2\pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \cos(nx) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx.$$

Par IPP:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \left[\underbrace{\left[\frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi}}_0 - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right]$$

$$= -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} \right)$$

et comme $\cos(n\pi) = (-1)^n$; on a :

$$a_n = \frac{4}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right), \quad \forall n \geq 1.$$

③ La série de Fourier de f est :

$$\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right) \cos(nx).$$

④ Sur les intervalles $[0, \pi]$ et $[\pi, 2\pi]$, f est de classe C^∞ . Donc f est C^1 par morceaux sur $[0, 2\pi]$ et sur \mathbb{R} .

~~On voit également~~ On voit également que f est continue sur \mathbb{R} .

Donc d'après le théorème de Dirichlet $f(x) = Sf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; Autrement dit $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$2x = \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right) \cos(nx).$$

⑤ En prenant $x=0$, on a

$$\pi + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 0.$$

On a

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \begin{cases} 0, & \text{si } n=2p, \\ \frac{(-1)^{2p-1}}{(2p-1)^2} = \frac{-1}{(2p-1)^2}, & \text{si } n=2p-1. \end{cases}$$

Donc:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2p-1)^2}$$

et donc

$$\pi - \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = 0.$$

D'où:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$