## Corrigé du Contrôle continu 3
### (Maths 3, 2019)

**Questions de cours :**

① Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^2)^n$ et comme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ a comme rayon de convergence $1$, on a $|z^2|<1$ ssi $|z|<1$ et donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}$ est $1$. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^2)^n = \frac{1}{1-z^2}.$$

② L'application $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ de $[a,b]$ telle que $f$ est continue sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$ (pour $0 \leq i \leq n-1$).

**Exercice 1 :**

① Comme $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, on a $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$. De même comme $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Donc :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{(n+1)^3 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}\,(n+1)^3 \cdot \frac{1}{n}}$$

et comme $(n+1)^3 \underset{+\infty}{\sim} n^3$, on a finalement

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} \cdot n^3 \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{5/2}}.$$

② Comme $u_n \geq 0$ et comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{5/2}}$, les deux séries $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{5/2}}$ sont de la même nature. Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{5/2}}$ est une série de Riemann convergente, par le critère des équivalents, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

③ On peut utiliser par exple le critère de D'Alembert et la question ①. On a, grâce aux équivalents :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{5/2}}{n^{5/2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{5/2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5/2}}{n^{5/2}} = 1$$

et donc le rayon de convergence est $1$.

Exercice 2 :

① L'application $g$ est la somme de la série entière géométrique de raison 1 sur $I$ :

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

De même, on a :

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{3})} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n.$$

② Pour tout $t \in ]-1,1[$, on peut intégrer terme-à-terme ;

$$\int_0^t \frac{1}{1-x}\,dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

et donc $-\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$

et enfin $\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-t^{n+1}}{n+1}$.

De même pour tout $t \in ]-1,1[$, on a :

$$\int_0^t \frac{1}{3-x}\,dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

D'où : $-\ln(3-t) + \ln(3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}(n+1)} \cdot t^{n+1}$

Enfin : $\ln(3-t) = \ln(3) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}(n+1)} \cdot t^{n+1}$.

③ On a $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3) = (1-x)(3-x)$. Comme sur $I$, $(1-x)>0$ et $(3-x)>0$, on a :

$$\ln(x^2-4x+3) = \ln((1-x)(3-x)) = \ln(1-x) + \ln(3-x).$$

En regroupant les deux développements précédents, on a :

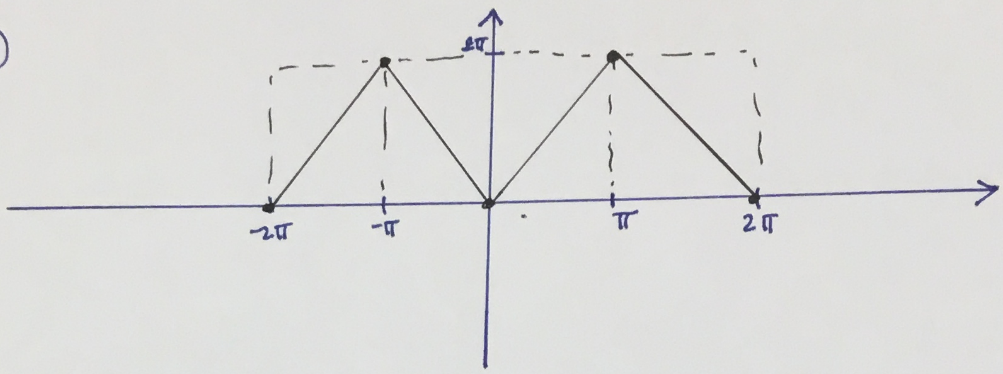
$$\ln(x^2-4x+3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-x^{n+1}}{n+1} + \ln(3) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}(n+1)} \cdot x^{n+1}$$

$$= \ln(3) - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{+1}{n+1} + \frac{1}{3^{n+1}(n+1)}\right) x^{n+1}$$

$$= \ln(3) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}(n+1)} \cdot x^{n+1}.$$

Exercice 3:

(1)




(2) Comme $f$ est paire, $b_n = 0$, $\forall n \geq 1$, et on a :

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \text{ pour } n \geq 1.$$

Donc:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,dx = \frac{4}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\pi^2 = 2\pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos(nx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx.$$

Par IPP:

$$a_n = \frac{4}{\pi}\left[\underbrace{\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx\right]$$

$$= -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}\,dx = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2}\right)$$

et comme $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ; on a :

$$a_n = \frac{4}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right), \quad \forall n \geq 1.$$

(3) La série de Fourier de $f$ est:

$$\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right)\cos(nx).$$

(4) Sur les intervalles $[0,\pi]$ et $[\pi, 2\pi]$, $f$ est de classe $C^{\infty}$. Donc $f$ est $C^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi]$ et sur $\mathbb{R}$. On voit également que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc d'après le théorème de Dirichlet $f(x) = Sf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ; Autrement dit $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$2x = \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right)\cos(nx).$$

(5) En prenant $x=0$, on a

$$\pi + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = 0 .$$

On a
$$\frac{(-1)^n-1}{n^2} = \begin{cases} 0, & \text{si } n=2p, \\ \dfrac{(-1)^{2p+1}-1}{(2p+1)^2} = \dfrac{-2}{(2p+1)^2}, & \text{si } n=2p+1. \end{cases}$$

Donc:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n-1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{-2}{(2p+1)^2}$$

et donc
$$\pi - \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = 0 .$$

D'où:
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$$