Corrigé du CC1 (sujet 1)
09/10/2019 Maths 3

Questions de cours : Voir le cours.

Exo 1 :

(1) On calcule $\det(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$:

$$\det(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) = \begin{vmatrix} \boxed{-1 \quad 0 \quad 1} \\ -1 \quad 1 \quad 0 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1.$$

Comme $\det(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) \neq 0$, la famille $\mathcal{E}$ est libre.
Comme $\mathcal{E}$ est une famille de trois vecteurs libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) On écrit les vecteurs $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ comme colonnes de $P_{B\mathcal{E}}$:

$$P_{B\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) On utilise la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Donc $P_{B\mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On sait que $P_{\mathcal{E}B} = P_{B\mathcal{E}}^{-1}$.

④ On sait $M_{\mathcal{E}}(v) = P_{\mathcal{E}B} \cdot M_B(v)$ et donc

$$M_{\mathcal{E}}(v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ ou

autrement : $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$.

Exo 2 :

① Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors

$\vec{u} \in Ker(f)$ ssi $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z=0 \\ x-2y+4z=0 \end{cases}$ ssi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On peut utiliser la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'où $\vec{u} \in Ker(f)$ ssi $\begin{cases} x+2z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} x=-2z \\ y=z \end{cases}$.

Donc $Ker(f) = \{ (-2z, z, z) \mid z \in \mathbb{R} \} = \{ z \cdot (-2, 1, 1) \mid z \in \mathbb{R} \}$

$= Vect \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

D'où la famille constituée du vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de $Ker(f)$. (libre et génératrice). On a $rang(f) = 3-1 = 2$ (Théorème du rang)

② La matrice A de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

③ Comme $rang(f) = 2 = \dim(Im(f))$ et $Im(f)$ est engendré par les vecteurs colonnes de A; les vecteurs colonnes de A ne forment pas une famille libre. D'où $\det(A) = 0$.
On sait que $rang(A) = rang(f)$ et donc $rang(A) = 2$.

Exo 3: On utilise ici la méthode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & \lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & \lambda \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-7}{3} & \frac{7}{3} & 5/3 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \lambda-\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -5/7 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \lambda-\frac{1}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+\frac{1}{7} \end{array}\right).$$

La dernière équation du système est $0 \cdot z = \lambda + \frac{1}{7}$. Donc si le système a une solution alors $\lambda = \frac{-1}{7}$. On continue dans ce cas l'algorithme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-5}{7} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-5}{7} \end{array}\right).$$

D'où $\begin{cases} x = \frac{4}{7} \\ y = \frac{-5}{7} + z \end{cases}$. Donc:

$$Sol(S) = \left\{ \left(\tfrac{4}{7}, \tfrac{-5}{7} + z, z\right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \underbrace{\left(\tfrac{4}{7}, \tfrac{-5}{7}, 0\right)}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}_{\text{solutions du système homogène}}.$$

Conclusion:

- $\lambda \neq \frac{-1}{7} \Rightarrow$ pas de solutions.
- $\lambda = \frac{-1}{7} \Rightarrow Sol(S) = \left(\frac{4}{7}, \frac{-5}{7}, 0\right) + Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.