

---

**Examen final (2 h)**  
**Mercredi 18 décembre 2019**

---

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

**Exercice 1.** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'entiers naturels définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 14, \\ u_{n+1} &= 5u_n - 6, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Calculer  $u_{n+2}$  en fonction de  $u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. (a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en déduire que  $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$ .  
(b) Montrer par récurrence sur  $k$ , que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ .  
(c) Bonus : en déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$ .
4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $u_n = \frac{5^{n+2} + 3}{2}$ .
5. Montrer que pour tout entier  $m \geq 2$ ,  $5^m \equiv 25 \pmod{100}$ .
6. En utilisant les deux questions précédentes, en déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$ .
7. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \equiv 14 \pmod{50}$ .
8. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \equiv 14 \pmod{100}$  ou  $u_n \equiv 64 \pmod{100}$ .
9. En utilisant les questions 3 et 8, montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_{2k} \equiv 14 \pmod{100}$ .  
Bonus : montrer également que  $u_{2k+1} \equiv 64 \pmod{100}$ .
10. En déduire que les deux derniers chiffres de  $u_n$  sont 14 si  $n$  est pair et 64 si  $n$  est impair.

**Solution.**

1.  $u_1 = 5 \cdot 14 - 6 = 64$ ,  $u_2 = 5 \cdot 64 - 6 = 314$  et  $u_3 = 5 \cdot 314 - 6 = 1564$ .
2.  $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$ .
3. (a)  $U_{n+2} = 25u_n - 36 \equiv u_n \pmod{4}$  puisque  $25 = 4 \cdot 6 + 1 \equiv 1 \pmod{4}$  et  $36 = 4 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{4}$ .  
(b) Initialisation :  $u_{2 \cdot 0} = u_0 = 14 = 4 \cdot 3 + 2 \equiv 2 \pmod{4}$ . Hérité : Supposons  $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ .  
D'après la partie (a) on a  $u_{2(k+1)} = u_{2k+2} \equiv u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ .  
Ainsi  $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .  
(c) Par récurrence. Initialisation :  $u_{2 \cdot 0 + 1} = u_1 = 64 = 4 \cdot 16 \equiv 0 \pmod{4}$ . Hérité : Supposons  $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$ . D'après (a) on a  $u_{2(k+1)+1} = u_{(2k+1)+2} \equiv u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$ .  
Ainsi  $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

4. Par récurrence. Initialisation :  $u_0 = 14 = (5^{0+2} + 3)/2$ .  
 Hérité : Supposons  $u_n = (5^{n+2} + 3)/2$ . Alors

$$u_{n+1} = 5u_n - 6 = 5 \frac{5^{n+2} + 3}{2} - 6 = \frac{5^{(n+1)+2} + 15}{2} - 6 = \frac{5^{(n+1)+2} + 3}{2}.$$

Ainsi l'énoncé est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

5. Par récurrence. Initialisation :  $5^2 \equiv 25 [100]$ . Hérité : Supposons  $m \geq 2$  et  $5^m \equiv 25 [100]$ . Alors  $5^{m+1} = 5 \cdot 5^m \equiv 5 \cdot 25 = 125 \equiv 25 [100]$ .

Ainsi l'énoncé est vrai pour tout  $m \in \mathbb{N}$ .

6. On a  $2u_n = 5^{n+2} + 3 \equiv 25 + 3 = 28 [100]$ .  
 7. On a  $2u_n - 28 = 100z$  pour un  $z \in \mathbb{Z}$ , et donc  $u_n - 14 = 50z$ . Ainsi  $u_n \equiv 14 [50]$ .  
 8. Si  $u_n - 14 = 50z$ , soit  $z = 2z'$  est pair ; alors  $u_n - 14 = 100z'$  et  $u_n \equiv 14 [100]$ .  
 Soit  $z = 2z' - 1$  est impair, et  $u_n - 14 = 100z' - 50$ , d'où  $u_n \equiv 14 + 50 = 64 [100]$ .  
 9. Puisque  $4 \mid 100$ , si  $u_n \equiv 14 [100]$  alors  $u_n \equiv 14 \equiv 2 [4]$ , et si  $u_n \equiv 64 [100]$  alors  $u_n \equiv 64 \equiv 0 [4]$ . Dans le premier cas  $n$  doit être pair, et dans le deuxième cas  $n$  doit être impair d'après la partie 3.(b) et (c). D'après 8. on est toujours dans un des deux cas. Ainsi  $u_{2k} \equiv 14 [100]$  et  $u_{2k+1} \equiv 64 [100]$ .  
 10. Les deux derniers chiffres d'un entier  $m$  forment le reste de  $m$  lors de la division euclidienne de  $m$  par 100, et donc l'unique entier entre 0 et 99 congru à  $m$  modulo 100. Ainsi les deux derniers chiffres de  $u_n$  sont 14 si  $n$  est pair, et 64 si  $n$  est impair.

**Exercice 2.** Calculer  $\text{pgcd}(A, B)$  avec  $A, B \in \mathbb{R}[X]$  définis par

$$A = X^3 - X^2 - X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2.$$

**Solution.** On applique l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{array}{r} X^5 - 2X^4 \quad +X^2 - X - 2 \quad | \quad X^3 - X^2 - X - 2 \\ X^5 - X^4 - X^3 - 2X^2 \quad \quad \quad X^2 - X \\ \hline -X^4 + X^3 + 3X^2 - X - 2 \\ -X^4 + X^3 + X^2 + 2X \\ \hline 2X^2 - 3X - 2 \end{array}$$

Le premier reste (sous forme unitaire) est donc  $X^2 - \frac{3}{2}X - 1$ .

$$\begin{array}{r} X^3 - X^2 - X - 2 \quad | \quad X^2 - \frac{3}{2}X - 1 \\ X^3 - \frac{3}{2}X^2 - X \quad \quad \quad X + \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2}X^2 - 2 \\ \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{4}X - \frac{1}{2} \\ \hline \frac{3}{4}X - \frac{3}{2} \end{array}$$

Le deuxième reste (sous forme unitaire) est donc  $X - 2$ .

$$\begin{array}{r} X^2 - \frac{3}{2}X - 1 \quad | \quad X - 2 \\ X^2 - 2X \quad \quad \quad X - \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2}X - 1 \\ \frac{1}{2}X - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

Puisque le troisième reste est 0, on a  $\text{pgcd}(A, B) = X - 2$ .

*Alternative.* On devine  $A(2) = 8 - 4 - 2 - 2 = 0$ . Ainsi  $X - 2$  divise  $A$ . On divise :

$$X^3 - X^2 - X - 2 = (X - 2)(X^2 + X + 1).$$

Or, les racines de  $X^2 + X + 1$  sont les racines primitives troisièmes de l'unité  $j$  et  $j^2$ .  
Ainsi

$$B = (X - 2)(X - j)(X - j^2).$$

On évalue  $B$  aux points 2 et  $j$ . On a  $B(2) = 32 - 2 \cdot 16 + 4 - 2 - 2 = 0$  et

$$B(j) = j^2 - 2j + j^2 - j - 2 = 2j^2 - 3j - 2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2 \neq 0.$$

Alors  $B(j^2) = B(\bar{j}) = \overline{B(j)} \neq 0$ . Ainsi le seul facteur irréductible de  $A$  qui divise  $B$  est  $X - 2$ , et  $\text{pgcd}(A, B) = X - 2$ .

**Exercice 3.** Considérons l'application  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{1/x}$ .

1. Justifier que cette application est dérivable sur son domaine de définition, et calculer  $f'$  sur ce domaine.
2. Montrer que la dérivée  $f'$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Rappeler le théorème des accroissements finis.
4. Fixons  $x > 0$ .

(a) Utiliser ce théorème pour montrer qu'il existe  $c \in ]x, x + 1[$  tel que

$$f(x) - f(x + 1) = \frac{e^{1/c}}{c^2}.$$

(b) D'après la question 2, montrer alors que

$$\frac{e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} \leq \frac{e^{1/c}}{c^2} \leq \frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

(c) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que

$$\frac{x^2 e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} \leq x^2 (e^{1/x} - e^{1/(x+1)}) \leq e^{1/x}.$$

5. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (e^{1/x} - e^{1/(x+1)})$ .

**Solution.**

1. Pour  $r \in \mathbb{R}$  la fonction  $x \mapsto x^r$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  est dérivable avec dérivée  $x \mapsto rx^{r-1}$  (ici on a  $r = -1$ ), et la fonction  $x \mapsto e^x$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  est dérivable avec dérivée  $x \mapsto e^x$ . Ainsi leur composition  $f$  est dérivable, avec  $f'(x) = -e^{1/x}x^{-2}$ .
2.  $f'$  est encore dérivable comme produit de fonctions dérivables, et pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$  on a

$$f''(x) = e^{1/x}x^{-2}x^{-2} - e^{1/x}(-2)x^{-3} = e^{1/x}(x^{-4} + 2x^{-3}) > 0.$$

Ainsi  $f'$  est croissante.

3. Théorème des accroissements finis (TAF) : Soit  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il y a  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .
4. (a) Pour  $x > 0$  la fonction  $f$  est continue sur  $[x, x+1]$  et dérivable sur  $]x, x+1[$ . D'après le TAF il y a donc  $c \in ]x, x+1[$  tel que

$$-\frac{e^{1/c}}{c^2} = f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x).$$

$$\text{Ainsi } f(x) - f(x+1) = \frac{e^{1/c}}{c^2}.$$

- (b) Puisque  $f'$  est croissante,  $-f'$  est décroissante, et

$$\frac{e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} = -f'(x+1) \leq \frac{e^{1/c}}{c^2} = -f'(c) \leq \frac{e^{1/x}}{x^2} = -f'(x).$$

- (c) En multipliant avec  $x^2$  et en substituant l'égalité de la partie (a) on obtient

$$\frac{x^2 e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} \leq x^2 \frac{e^{1/c}}{c^2} = x^2 (f(x) - f(x+1)) = x^2 (e^{1/x} - e^{1/(x+1)}) \leq e^{1/x}.$$

5. D'après le théorème des gendarmes,

$$1 = 1 \cdot e^0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (e^{1/x} - e^{1/(x+1)}) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

La limite vaut donc 0.

**Exercice 4.** Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre  $iz^2 + 2z + (1-i) = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .
2. On considère le complexe  $z = 1 + i\sqrt{3}$ .
  - (a) Calculer  $z + \bar{z}$  et  $z - \bar{z}$ .
  - (b) Écrire  $z$  sous forme exponentielle.
  - (c) Calculer  $z^5 + \bar{z}^5$ .
  - (d) Calculer  $z^5 - \bar{z}^5$ .

**Solution.**

1. Le discriminant vaut  $\Delta = 2^2 - 4 \cdot i \cdot (1 - i) = 4 - 4i + 4i^2 = 4i = 4e^{i\pi/2}$ . Si  $\delta = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(1 + i)$ , alors  $(\pm\delta)^2 = \Delta$ , et les deux solutions sont

$$z_1 = \frac{-2 + \delta}{2i} = i + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 - \delta}{2i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2. (a)  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 2$  et  $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z) = 2i\sqrt{3}$ .  
(b)  $z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\pi/3}$ .  
(c) et (d). On a

$$\begin{aligned} z^5 &= 2^5 e^{i5\pi/3} = 32\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right) = 32\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right) \\ &= 32\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 16\bar{z}. \end{aligned}$$

Ainsi  $z^5 + \bar{z}^5 = 2\operatorname{Re}(z^5) = 32\operatorname{Re}(\bar{z}) = 32$  et  $z^5 - \bar{z}^5 = 2i\operatorname{Im}(z^5) = 32i\operatorname{Im}(\bar{z}) = -32i\sqrt{3}$ .