Université Claude Bernard Lyon 1
Cursus prépa - Première année Semestre d'automne 2019-2020

Fondamentaux des mathématiques - DS n°3
PARTIE CUPGE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra pour- suivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.
Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* **pas autorisées.**

Exercice 1 : On rappelle que $\mathbb{U}$ est le cercle unitaire des complexes de module 1. Montrer que pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{U}$ on a $\dfrac{(a_1+a_2)\cdots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1)}{a_1 a_2 \cdots a_n} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Résoudre l'équation $z^2 + (4-3i)z = 2+8i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 3 : Soit $f(x) = x\, e^{\frac{2x}{x^2-1}}$. On se propose d'étudier f.

1. Donner le domaine de définition maximal D de f.
2. Montrer que $f(1/x) = 1/f(x)$ et $f(x)\, f(-x) = -x^2$ pour $x \in D, \neq 0$.
3. Calculer les limites et les asymptotes de f en $\pm\infty$ (s'il y en a).
   [Indication : La dérivée de $g(x) = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$ en 0 peut s'avérer utile.]
4. Étudier les limites à droite et à gauche de f aux points de $\mathbb{R} \setminus D$.
5. Calculer la dérivée de f où elle existe, et dresser le tableau de variations.
   [Indication : L'identité $x^4 - 2x^2 + 1 - 2x - 2x^3 = (x^2 - x + 1)^2 - 5x^2$ peut s'avérer utile.]
6. Dresser le graphe de f.

Exercice 4 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, on pose $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
   En déduire qu'elles admettent une limite γ. Elle s'appelle la *constante d'Euler*.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice 5 : Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer l'égalité

$$\sup\{|x-y| : x, y \in A\} = \sup A - \inf A.$$