Fondamentaux des mathématiques - DS n°2
Partie CUPGE

Exercice 1 :

1. Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
2. On pose $g(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer g', g'', g''' et g''''. Quelle est leur parité ?
3. En étudiant les variations, montrer successivement que $g'''(x) \leq 0$, $g''(x) \leq 0$, $g'(x) \leq 0$ et $g(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$. Que se passe-t-il pour $x \leq 0$?
4. Si $(x_n)_n$ est une suite avec $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, en déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(x_n)-1}{x_n^2}$.

Solution.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$
2. $g'(x) = -\sin(x) + x - \frac{x^3}{3!}$, $g''(x) = -\cos(x) + 1 - \frac{x^2}{2}$, $g'''(x) = \sin(x) - x$ et $g''''(x) = \cos(x) - 1$. Puisque g est paire, g'' et g'''' aussi, et g' et g''' sont impaires.
3. On a $g''''(x) \leq 0$ puisque $\cos(x) \leq 1$. Ceci implique $g'''(x) \leq g'''(0) = 0$ pour $x \geq 0$. Alors $g''(x) \leq g''(0) = 0$, et $g'(x) \leq g'(0) = 0$, ainsi que $g(x) \leq g(0) = 0$, pour $x \geq 0$. Par parité, $g(x) \leq 0$ et $g''(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $g'(x) \geq 0$ et $g'(x) \geq 0$ pour $x \leq 0$.
4. Les inégalités $g''(x_n) \leq 0$ et $g(x_n) \leq 0$ donnent $-\frac{x_n^2}{2} \leq \cos(x_n) - 1 \leq \frac{x_n^4}{4!} - \frac{x_n^2}{2}$. D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(x_n)-1}{x_n^2} = -\frac{1}{2}$.

Exercice 2 : Soit X un ensemble, et X_i une partie finie de X pour $i \in [\![1, n]\!]$, avec $n \geq 1$. On cherche à montrer que

$$\#(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{I \subseteq [\![1,n]\!],\, I \neq \emptyset} (-1)^{1+\# I} \#(\bigcap_{i\in I} X_i).$$

Comme indiqué, la somme porte sur toutes les parties I non-vides de $[\![1, n]\!]$.

1. Expliciter et commenter les cas $n = 1$ et $n = 2$. On remarquera que $n = 2$ est un théorème du cours qu'on pourra utiliser par la suite.
2. Montrer l'égalité pour $n = 3$.
3. Montrer l'égalité pour n quelconque.

Solution.

1. $n = 1$ donne $\# X_1 = \# X_1$ (trivial), et $n = 2$ donne le théorème du cours
$$\#(X_1 \cup X_2) = \# X_1 + \# X_2 - \#(X_1 \cap X_2).$$
2. On pose $Y = X_1 \cup X_2$, $Y_1 = X_1 \cap X_3$ et $Y_2 = X_2 \cap X_3$. Alors $Y_1 \cap Y_2 = X_1 \cap X_2 \cap X_3$, et
$$Y \cap X_3 = (X_1 \cup X_2) \cap X_3 = (X_1 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X_3) = Y_1 \cup Y_2.$$
Alors
$$\begin{aligned}
&\#(X_1 \cup X_2 \cup X_3) = \#(Y \cup X_3) = \# Y + \# X_3 - \#(Y \cap X_3) \\
&= \#(X_1 \cup X_2) + \# X_3 - \#(Y_1 \cup Y_2) \\
&= \# X_1 + \# X_2 - \#(X_1 \cap X_2) + \# X_3 - \# Y_1 - \# Y_2 + \#(Y_1 \cap Y_2) \\
&= \# X_1 + \# X_2 + \# X_3 - \#(X_1 \cap X_2) - \#(X_1 \cap X_3) - \#(X_2 \cap X_3) + \#(X_1 \cap X_2 \cap X_3).
\end{aligned}$$

3. On fait une récurence sur n. Pour l'*initialisation*, le cas $n = 1$ est trivial, et celui de $n = 2$ est un théorème du cours.

   Hérédité. On suppose donc que le théorème soit vrai pour n, et on considère une famille $\{X_i : i \in [\![1, n+1]\!]\}$. On pose $Y_i = X_i \cap X_{n+1}$, et $Y = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$. D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\#Y = \#(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{I \subseteq [\![1,n]\!],\, I \neq \emptyset} (-1)^{1+\#I} \#(\bigcap_{i \in I} X_i), \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}
\#(Y \cap X_{n+1}) = \#(\bigcup_{i=1}^{n} Y_i) &= \sum_{I \subseteq [\![1,n]\!],\, I \neq \emptyset} (-1)^{1+\#I} \#(\bigcap_{i \in I} Y_i) \\
&= \sum_{I \subseteq [\![1,n]\!],\, I \neq \emptyset} (-1)^{1+\#I} \#(\bigcap_{i \in I \cup \{n+1\}} X_i) \\
&= \sum_{J \subseteq [\![1,n+1]\!],\, \{n+1\} \subsetneq J} (-1)^{\#J} \#(\bigcap_{i \in J} X_i) \qquad \text{avec } J = I \cup \{N+1\}).
\end{aligned}$$

   Mais toute partie I non-vide de $[\![1, n+1]\!]$ est soit partie non-vide de $[\![1, n]\!]$, soit égal à $\{n+1\}$, soit satisfait $\{n+1\} \subsetneq I \subseteq [\![1, n+1]\!]$. D'après le cas $n = 2$ (théorème du cours)

$$\begin{aligned}
\#(\bigcup_{i=1}^{n+1} X_i) &= \#(Y \cup X_{n+1}) = \#Y + \#X_{n+1} - \#(Y \cap X_{n+1}) \\
&= \sum_{I \subseteq [\![1,n]\!],\, I \neq \emptyset} (-1)^{1+\#I} \#(\bigcap_{i \in I \cup \{n+1\}} X_i) + \#X_{n+1} - \sum_{J \subseteq [\![1,n+1]\!],\, \{n+1\} \subsetneq J} (-1)^{\#J} \#(\bigcap_{i \in J} X_i) \\
&= \sum_{I \subseteq [\![1,n+1]\!],\, I \neq \emptyset} (-1)^{1+\#I} \#(\bigcap_{i \in I} X_i).
\end{aligned}$$

   L'énoncé est donc vrai pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 3 :

1. (Question de cours) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective, et si $g \circ f$ est surjectve, alors g est surjective.
2. Soient f et h deux fonctions $X \to Y$ et $g : Y \to X$ tels que $f \circ g \circ h$ est injective et $h \circ g \circ f$ est surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Solution.

1. Si $g \circ f$ est injective, il y a un inverse à gauche $h : Z \to X$ tel que $h \circ g \circ f = \mathrm{id}_X$. Alors $h \circ g$ est un inverse à gauche de f, et f est injective. Si $g \circ f$ est surjective, il y a un inverse à droite $h : Z \to X$ tel que $g \circ f \circ h = \mathrm{id}_Z$. Alors $g \circ h$ est un inverse à droite de g, et g est surjective.
2. Puisque $f \circ g \circ h$ est injective, h aussi ; puisque $h \circ g \circ f$ est surjective, h aussi. Ainsi h est bijective. Donc $f \circ g$ est injective, ainsi que g, et $g \circ f$ est surjective, ainsi que g. Donc g est bijective. Mais alors f est injective et surjective, donc bijective.

Exercice 4 : On cherche à étudier la fonction réelle $f(x) = \ln \left| \frac{1}{e^x - 1} \right|$.

1. Donner son domaine maximal de définition D.
2. Chercher le domaine maximal où f est dérivable. Calculer sa dérivée.
3. Calculer les limites en $\pm\infty$ et $\mathbb{R} \setminus D$.
4. Établir le tableau des variations de f.
5. Chercher les asymptotes éventuelles de f.
6. Tracer le graphe de f.

Solution.

1. Soit $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, pour que le dénominateur soit différent de zéro. Alors l'argument du logarithme est strictement positif pour $x \in D$, et D est bien le domaine maximal de définition..

2. La fonction $f(x) = \ln\left|\dfrac{1}{e^x - 1}\right| = -\ln|e^x - 1|$ est dérivable sur D, avec

$$f'(x) = -\frac{1}{|e^x - 1|}\, e^x \mathrm{sgn}(e^x - 1) = \frac{-\mathrm{sgn}(x)}{|1 - e^{-x}|}.$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} -\ln|e^x - 1| = \lim_{x\to\infty} -\ln e^x|1 - e^{-x}| = \lim_{x\to\infty}(-\ln e^x) \lim_{x\to\infty}|1 - e^{-x}| = -\infty,\\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} -\ln|e^x - 1| = -\ln|-1| = 0, \quad \text{et}\\
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} -\ln|e^x - 1| = \lim_{y\to 0} -\ln y = \infty.
\end{aligned}$$

4. On a $\mathrm{sgn}(f'(x)) = -\mathrm{sgn}(x)$. Ainsi

x	$-\infty$			0			∞
$f'(x)$		$+$		$\mid$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	∞	$\mid$	∞	$\searrow$	$-\infty$

5. En $-\infty$ on a une asymptote $y = 0$. En ∞ on a

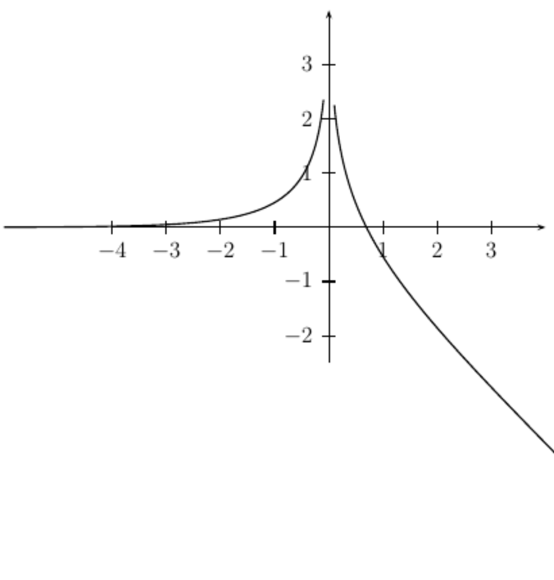
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\ln|e^x - 1|}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\ln e^x\ \ln|1 - e^{-x}|}{x} = -1$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(f(x) - (-x)) &= \lim_{x\to\infty}(x - \ln|e^x - 1|) = \lim_{x\to\infty} \ln e^{x - \ln|e^x - 1|}\\
&= \ln \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{|e^x - 1|} = \ln \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|1 - e^{-x}|} = \ln 1 = 0.
\end{aligned}$$

On a donc une asymptote $y = -x$ en ∞.

6.



Exercice 5 : Exprimer les phrases suivantes en langage formel. (Dans cette question, X dénote un ensemble et R une relation sur X.)

1. R est une relation d'ordre total sur X.
2. Tout $x \in X$ a un successeur par rapport à R (c'est-à-dire un élément minimal $y \neq x$ avec xRy).

Solution.

1. $\forall x \in X\, \forall y \in X\, \forall z \in X\, [xRx \wedge ((xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y)) \wedge ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz) \wedge (xRy \vee yRx)]$.
2. $\forall x \in X\, \exists y \in X\, [xRy \wedge x \neq y \wedge \forall z \in X\, (xRz \Rightarrow (x = z \vee yRz))]$.