Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2019 - 2020
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°2 - Corrigé

Exercice 1.

a) Par définition :

$$f[A] = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$$
$$f^{-1}[B] = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

.

b) Supposons que $(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$. Montrons $A = B$ par double inclusion.
Soit $x \in A$ alors $x \in A \cup B = A \cap B$. Donc on a $x \in B$.
On a montré $\forall x \in A, x \in B$ et donc $A \subseteq B$.
Soit $x \in B$ alors $x \in A \cup B = A \cap B$. Donc on a $x \in A$.
On a montré $\forall x \in A, x \in B$ et donc $B \subseteq A$.
Ainsi $A = B$
Supposons maintenant $A = B$
Alors on a, $A \cup B = A \cup A = A$ et $A \cap B = A \cap A = A$. Et donc $A \cup B \subseteq A \cap B$.
On a montré : $(A \cup B) \subseteq (A \cap B) \Leftrightarrow A = B$
(Pour la première implication (en supposant $(A \cup B) \subseteq (A \cap B)$), on pouvait faire $A \subseteq A \cup B \subseteq A \cap B \subseteq B$ et faire la même chose pour B, ou alors invoquer un argument de symétrie.)

c) Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ on pose $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ définit si $X \in \mathcal{P}(E)$ par $f(X) = X \cap A$.
Supposons $A = E$.
Alors pour $X \in \mathcal{P}(E)$ on a $f(X) = X \cap A = X \cap E = X$.
En particulier on a montré que $\forall X \in \mathcal{P}(E), \exists Y \in \mathcal{P}(E), f(Y) = X$.
La fonction f est donc surjective.
Supposons que f soit surjective.
On a $E \in \mathcal{P}(E)$ et il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X) = E$.
On a donc $X \cap A = E$. En particulier, $E \subseteq A$
(en effet pour x dans E, on a $x \in X \cap A$ et $x \in A$).
Or $A \subseteq E$.
Et donc $A = E$.
On a alors montré par double implication montré que f est surjective si et seulement si $A = E$.

Exercice 2.

a) Pour x dans $\mathbf{R}$ on a : $x^6 - x - \ln(x) = x\left(x^5 - 1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$.
Or, par croissance comparée $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc $\lim_{x \to +\infty} x^5 - 1 - \dfrac{\ln(x)}{x} = +\infty$.
Et $\lim_{x \to +\infty} x^6 - x - \ln(x) = +\infty$.

b) Pour x dans $\mathbf{R}$, on a $e^x \ln(x) - e^{\sqrt{x}} x^7 = e^x \left(\ln(x) - e^{\sqrt{x}-x} x^7\right) = e^x \left(\ln(x) - e^{\sqrt{x}-x+7\ln(x)}\right)$.

Et $\sqrt{x} - x + 7\ln(x) = x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \frac{7\ln(x)}{x}\right)$.

Or par croissance comparée $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

On a alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - x + 7\ln(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 + \frac{7\ln(x)}{x}\right) = -\infty$.

On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}-x+7\ln(x)} = 0$. Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$,

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x \left(\ln(x) - e^{\sqrt{x}-x+7\ln(x)}\right) = +\infty$. On peut donc conclure :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^x \ln(x) - e^{\sqrt{x}} x^7 = +\infty$.

c) Pour x dans $\mathbf{R}$ on a $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$.

Or ln est dérivable en 1 et on reconnait dans $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x}$ la définition du nombre dérivé $\ln'(1) = 1$.

On a donc comme exp est continue $\displaystyle\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = e^1 = e$.

Et $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Exercice 3.

Supposons $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$. Montrons $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } R)$ par double implication :

Supposons $(P \text{ ou } Q)$.

Si on a P alors on a Q car $P \Rightarrow Q$. On a aussi R car $Q \Rightarrow R$.

Si on a Q, on a aussi R car $Q \Rightarrow R$.

Dans les deux cas, on a Q et R.

Supposons $(Q \text{ et } R)$.

On a Q.

On a donc P ou Q

On a donc $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } R)$.

Supposons maintenant $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } R)$.

Si on a P,

alors on a P ou Q et donc Q et R. En particulier on a Q

On a donc $P \Rightarrow Q$.

Si on a Q,

alors on a P ou Q et donc Q et R. En particulier on a R

On a donc $Q \Rightarrow R$.

On a donc $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$.

On a bien montré que la proposition $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$ est équivalente à la proposition $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } R)$ par double implication.

Sinon on peut faire comme suit :

On sait que $(P \text{ ou } Q) \Leftarrow (Q \text{ et } R)$ est toujours vraie, donc que $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } R)$ est équivalente $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow (Q \text{ et } R)$

$$\begin{aligned}
(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } R) &: ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (Q \text{ et } R)) \text{ ou } (\neg(P \text{ ou } Q) \text{ et } \neg(Q \text{ et } R)) \\
&: ((P \text{ et } Q \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } Q \text{ et } R)) \text{ ou } ((\neg P \text{ et } \neg Q) \text{ et } (\neg Q \text{ ou } \neg R)) \\
&: ((P \text{ et } Q \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)) \text{ ou } ((\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } \neg Q) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } \neg R)) \\
&: (Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } \neg R) \\
&: (Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q) \\
&: (P \text{ et } Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } \neg R) \\
&: (P \text{ et } Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } \neg R)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) &: (\neg P \text{ ou } Q) \text{ et } (\neg Q \text{ ou } R) \\
&: (\neg P \text{ et } \neg Q) \text{ ou } (\neg P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } \neg Q) \text{ ou } (Q \text{ et } R) \\
&: (\neg P \text{ et } \neg Q) \text{ ou } (\neg P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R) \\
&: (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } \neg R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } Q \text{ et } R) \\
&\quad \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } R) \text{ ou } (P \text{ et } Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } Q \text{ et } R) \\
&: (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } \neg R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } R) \text{ ou } (P \text{ et } Q \text{ et } R) \\
&: (P \text{ et } Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } R) \text{ ou } (\neg P \text{ et } \neg Q \text{ et } \neg R)
\end{aligned}$$

Ce calcul (appelé mise sous forme normale disjonctive) montre l'équivalence de ces deux propositions.

En fait ce calcul donne les tables de vérité de ces propositions :

Si $Q = V$

$P\backslash Q$	V	F
V	V	F
F	V	V

et si $Q = F$

$P\backslash Q$	V	F
V	F	F
F	F	V

Exercice 4.

a) Soient x et y dans $\mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) = f(y) &\Rightarrow \arctan(e^x - e^{-x}) = \arctan(e^y - e^{-y}) \\
&\Rightarrow e^x - e^{-x} = e^y - e^{-y} && \text{car arctan est injective} \\
&\Rightarrow \sinh(x) = \sinh(y) \\
&\Rightarrow x = y && \text{car sinh est injectif}
\end{aligned}$$

On a montré $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. C'est à dire que f est injective.
Pour x in $\mathbf{R}$, $\arctan(e^x - e^{-x}) < \frac{\pi}{2}$, arctan étant majoré par $\frac{\pi}{2}$. On a donc $\arctan(e^x - e^{-x}) \neq \pi$.
On a montré $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq \pi$, ainsi f n'est pas surjective.

b) On sait que $\forall x \in Q, \exists, (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*, x = \frac{p}{q}$.
i.e. $\forall x \in Q, \exists, (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*, x = g(p,q)$. C'est à dire que g est surjective.
On a $g(2,2) = \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = g(1,1)$.
Or $(2,2) \neq (1,1)$.
On a donc montré, $\exists X \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*, \exists Y \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*, X \neq Y$ et $g(X) = g(Y)$ et donc que g n'est pas injective.

c) h a été vu en TD

Exercice 5. Soit f la fonction défini par $x \mapsto \arcsin(2x^2-1)$.

a) arcsin est défini sur $[-1,1]$.
Or, pour x dans $\mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} -1 \leqslant 2x^2-1 \leqslant 1 &\Leftrightarrow 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leqslant |x| \leqslant 1 \\ &\Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}$$

Donc f est défini sur $[-1,1]$.
De plus, soit $x \in \mathbf{R}$.
On a $f(-x) = \arcsin(2(-x)-1) = \arcsin(2x^2-1) = f(x)$.
On a montré $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x)$ et donc que f est paire.

b) On sait que arcsin est dérivable sur $]-1,1[$.
Or, pour x dans $[-1,1]$, le domaine de f, on a

$$\begin{aligned} -1 < 2x^2-1 < 1 &\Leftrightarrow 0 < 2x^2 < 2 \\ &\Leftrightarrow 0 < x^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < |x| < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 1 \text{ et } x \neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi f est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$.
Pour x in $]-1,1[\setminus\{0\}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{1-(4x^4-4x^2+1)}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{-4x^4+4x^2}} \\ &= \frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}} \\ &= \frac{4x}{|2x|\sqrt{(1-x^2)}} \\ &= \frac{2\,\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{(1-x^2)}} \end{aligned}$$

c) La fonction $g = f - 2\arcsin$ est dérivable sur $]0,1[$.

Et pour $x \in]0,1[$, on a $g'(x) = \frac{2\,\mathrm{sgn}(x)}{\sqrt{(1-x^2)}} - 2\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)}} = 0$.

On a donc $\forall x \in]0,1[, g'(x) = 0$. Donc, g est constante sur $]0,1[$

Or, $g(1/2) = f(1/2) - 2\arcsin(1/2) = \arcsin(-1/2) - 2\arcsin(1/2) = -\pi/6 - 2\pi/6 = -\pi/2$.

Donc, on a $\forall x \in]0,1[, g(x) = -\pi/2$. Ainsi $\forall x \in]0,1[, f(x) = 2\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}$.

Cette expression reste vraie pour 0 et 1 car $f(0) = \arcsin(-1) = -\pi/2 = 2\arcsin(0) - \pi/2$ et $f(1) = \arcsin(1) = \pi/2 = 2\arcsin(1) - \pi/2$.

Ainsi $\forall x \in [0,1], f(x) = 2\arcsin(x) - \frac{\pi}{2}$.

Si $x \in [-1,0]$ maintenant,

On a $-x \in [0,1]$ et $f(-x) = 2\arcsin(-x) - \frac{\pi}{2} = 2\arcsin(|x|) - \frac{\pi}{2}$.

Ainsi $\forall x \in [-1,0], f(x) = 2\arcsin(|x|) - \frac{\pi}{2}$.

Et on conclut $\forall x \in [-1,1], f(x) = 2\arcsin(|x|) - \frac{\pi}{2}$.

d) On trace le graphe de f sur $[0,1]$ puis on fait son symétrique par l'axe $x = 0$.

e) On sait que arcsin est dérivable en zero de dérivée 1, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x) - \arcsin(0)}{x} = 1$

Or, pour $x \in]0,1]$ on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{2\arcsin(x)-2\arcsin(0)}{x}$.

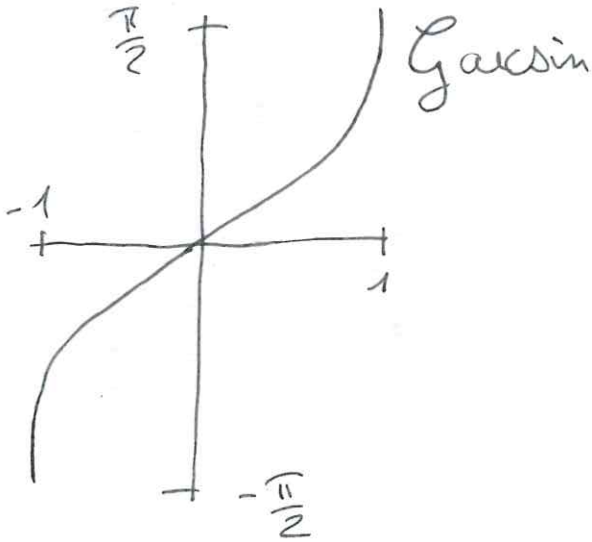
Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 2$.

Et, pour $x \in [-1,0]$ on a : $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{2\arcsin(-x)-2\arcsin(0)}{x} = -2\frac{\arcsin(-x)-\arcsin(0)}{-x}$.

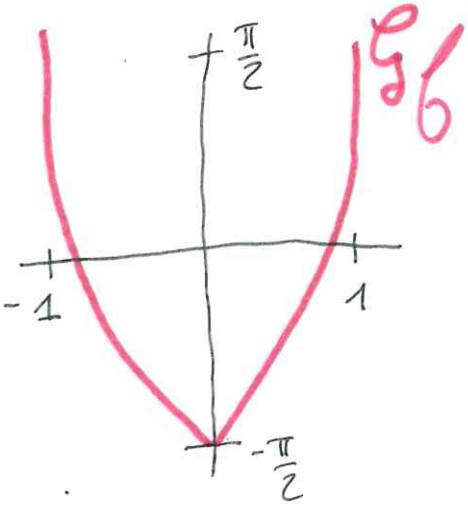
Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -2$.

Ainsi les limites en $x \to 0^+$ et la limite en $x \to 0^-$ de $\frac{f(x)-f(0)}{x}$, sont différentes et $\frac{f(x)-f(0)}{x}$, n'a donc pas de limite en 0.

Ainsi f n'est pas dérivable en 0.



$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{G}_{\arcsin}$
-1
1
$-\frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{G}_f$
-1
1
$-\frac{\pi}{2}$